

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Dominika Maťašová

Stresové testování v kvantitativní analýze sekuritizovaných produktů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petr Myška

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Rada by som poďakovala vedúcemu mojej diplomovej práce, RNDr. Petrovi Myškovi, za poskytnutie tejto témy diplomovej práce, za poskytnutú literatúru a materiály, za všetky rady a vedenie správnym smerom.

V neposlednom rade by som chcela poďakovať mojim rodičom, bez ktorých podpory by som sa až k tejto práci nebola dostala.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Praze dne 1.12.2010

Dominika Maťašová

Obsah

1	Cenné papiere podložené aktívami - sekuritizácia	7
1.1	Dôvody vzniku sekuritizovaných produktov	8
1.2	Druhy sekuritizovaných produktov	9
1.2.1	Cenné papiere typu MBS	11
1.2.2	Cenné papiere typu CDO	11
1.2.3	Vývoj emisií CDO	13
1.3	Tranže	14
1.4	Strany zúčastnené pri transakciách	16
1.5	Podkladové portfólio	17
1.5.1	Základné pojmy	18
1.5.2	Voľba podkladového portfólia	19
2	Testy pokrytia, oceňovacie metódy CDO, finančné toky	25
2.1	OC test	25
2.2	IC test	26
2.3	Oceňovacie metódy CDO	26
2.3.1	Základné pojmy	26
2.3.2	Miera návratnosti	29
2.3.3	Úvod do analytických metód	31
2.3.4	Simulačné metódy - Markovove reťazce	32
2.3.5	Simulačné metódy - Kopula funkcie	35
2.4	Prerozdeľovanie finančných tokov	38
2.5	Výstupy z kvantitatívnych analýz - úvod do teórie	41
3	Prezentácia numerických výpočtov	46
3.1	Popis použitých hodnôt pri simuláciách	46
3.1.1	Korelácie medzi zlyhaniami emitentov	47
3.1.2	Kopule - generovanie dôb do zlyhania	47
3.1.3	Miera návratnosti	47
3.1.4	Veľkosť tranží, spread a spúšťacie hodnoty	47
3.1.5	Finančný vodopád - Monte Carlo simulácie	48

3.2	Výstupy z analýzy fiktívneho portfólia	49
3.2.1	APV, STD	50
3.2.2	Percentilové charakteristiky	50
3.2.3	VaR, Extrémna strata	51
3.2.4	Očakávaná strata, pomer výnosu a rizika, durácia a impliko- vaný rating	53
3.2.5	DAS	53
4	Stresové testovanie	55
4.1	Analýza reálnych dát tranží triedy A	55
4.2	Stresové testovanie pravdepodobnosti zlyhania	56
4.3	Stresové testovanie miery návratnosti	58
4.4	Kombinovaný prístup v stresovom testovaní	61

Název práce: Stresové testování v kvantitativní analýze sekuritizovaných produktů
Autor: Dominika Maťašová
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petr Myška
e-mail vedoucího: PMyska@csas.cz

Abstrakt: Táto diplomová práca pojednáva o sekuritizovaných transakciách finančného trhu, predovšetkým o dlhopisoch podložených aktívami. V prvej časti práce sú popísané dôvody vzniku týchto produktov, tzv. podkladové portfólio, tranže a ďalej mechanizmy, na základe ktorých tieto štruktúry fungujú. V druhej časti sa práca zaoberá metódami oceňovania, ku ktorým sú okrem iného používané teórie Markovových reťazcov a kopulí. Nasleduje praktická časť s výstupom z kvantitatívnej analýzy a na záver sa práca venuje stresovanému testovaniu daných parametrov.

Klíčové slová: sekuritizované produkty, tranže, Monte Carlo simulácie peňažných tokov, kopule, stresové testovanie

Title: Stress testing in quantitative analysis of securitized products
Author: Dominika Maťašová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Petr Myška
Supervisor's e-mail address: PMyska@csas.cz

Abstract: In the present work we study the securitized products of financial markets with focus on collateralized debt obligations. In first part the thesis deals with the reasons behind launching these products, the portfolio, tranches and further on mechanisms how these structures are working. In the second part the thesis describes the valuation methods for which the Markov chains and copula functions are used. Further on follows the practical part with output from the quantitative analysis and at the end the thesis describes the stress testing of particular parameters.

Keywords: securitized products, tranches, Monte Carlo simulation of cash flows, copula functions, stress testing

Úvod

Sekuritizované produkty slúžia finančným inštitúciám poskytujúcim úvery k premene nelikvidných a rizikových individuálnych úverov na likvidné, menej rizikové cenné papiere. Z podkladového portfólia veľkého množstva malých, individuálnych úverov vznikne balík aktív s novým usporiadaním. Tento proces okrem iného ponúka regulovaným subjektom (bankám, poisťovniam) zníženie požiadaviek na kapitálovú primeranosť.

Tieto produkty zaznamenali v posledných rokoch významný nárast a veľký vplyv vo fungovaní finančných trhov. V roku 2006 dosiahli svoje maximum. Následne sa začala v USA šíriť neistota z amerického nehnuteľnostného trhu. V roku 2007 sa pokles na nehnuteľnostnom trhu prejavil aj v poklese cien cenných papierov a spôsobil cyklickú reakciu, ktorá vyústila do globálnej finančnej krízy. Za danej situácie sa naskytli otázky, prečo ceny týchto produktov klesli v takom meradle a či pri oceňovaní neboli podcenené niektoré rizikové faktory.

V prvej časti práce sa budeme venovať dôvodom vzniku sekuritizovaných produktov, druhom, ktoré existujú, popisom tranží, strán zúčastnených pri týchto transakciách a nakoniec popíšeme podkladové portfólio. V tejto časti takisto popíšeme v krátkosti vývoj trhu so sekuritizovanými produktami v posledných rokoch.

Druhá časť práce popisuje testy pokrytia (OC a IC test), metódy používané pre oceňovanie, predovšetkým Markovove reťazce a kopula funkcie a prerozdeľovanie finančných tokov. Teoreticky taktiež popisuje výstupy z kvantitatívnych analýz ako hodnotu v riziku, očakávanú stratu, implikovaný rating a iné.

Tretia časť práce sa dotýka prezentácie numerických výpočtov na fiktívnom portfóliu pomocou kopula funkcií (použitej pre určenie doby do zlyhania aktíva) a finančného vodopádu pomocou Monte Carlo simulácií. Prezentované budú výstupy hodnôt teoreticky popísaných v predchádzajúcej kapitole.

V záverečnej časti práce budeme pojednávať o stresovom testovaní a popíšeme jeho dôležitosť vo vzťahu k udalostiam roku 2007. Vzhľadom k dostupnosti priebehu reálnych cien niekoľkých cenných papierov s ratingom AAA rozoberieme ich vývoj medzi rokmi 2007 a 2009 a vo vzťahu k tomuto vývoju sa pokúsime stresovať hodnoty na nami vytvorenom fiktívnom portfóliu, aby sme dokázali zhodnotiť, na aké hodnoty by mali byť dáta stresované, aby bolo možné odzrkadliť situáciu, ktorá v skutočnosti nastala.

Kapitola 1

Cenné papiere podložené aktívami - sekuritizácia

Zjednodušený obchodný model bánk môžeme popísať ako investovanie peňazí a špekuláciu s očakávaním pozitívneho návratu ich investícií. Základná zložka globálneho finančného systému je likvidita (ako sa bolestne prejavilo v druhej polovici roku 2007) - banky potrebujú hotovosť, aby boli schopné pokryť požiadavky každodenného obchodu. Podiel likvidných aktív, ktoré je banka povinná udržiavať, je prísne regulovaný regulátornými predpismi. Príklad uvádza [10]: ak priemerne zlyhá za rok v banke 5% portfólia banky, je banka povinná držať 8% hodnoty účtovníctva v likvidných aktívach.

Toto sú pre banky, ktoré sa snažia o čo najväčšiu možnú návratnosť svojho kapitálu, tzv. mŕtve peniaze. Preto sú banky nútené svojimi akcionármi akýmkoľvek spôsobom túto sumu znižovať. Bohužiaľ investície ako pôžičky firmám, hypotéky, spotrebiteľské úvery či kreditné karty sú veľmi nelikvidné aktíva. Pre tieto aktíva neexistuje žiadny sekundárny trh pre aktívne obchodovanie individuálnych úverov rovnakým spôsobom, ako sa obchoduje, napríklad, s akciami. Pre banku je teda zložitá čokoľvek s týmito aktívami robiť. Preto vznikol koncept sekuritizácie.

Sekuritizácia je proces premeny nelikvidných finančných aktív na obchodovateľné nástroje kapitálového trhu. Inak tiež povedané - združovanie jednotlivých štrukturovaných aktív (úverov, pohľadávok, cenných papierov) do balíku, ktorý je postúpený tretej osobe. Na balík vytvorený z podkladových aktív sú emitované cenné papiere kryté peňažnými príjmami z aktív portfólia (asset backed securities - ABS).

Proces sekuritizácie sa vo väčšom meradle rozšíril ako investičný produkt v 70. rokoch minulého storočia v USA, kde začal najskôr len transformáciou hypotekárnych zástavných listov. Neskôr sa začali vytvárať aj cenné papiere zložené z iných dlhových nástrojov (napríklad portfólia úverov z kreditných kariet, či študentských pôžičiek). Koncom osemdesiatych rokov začali byť ABS emitované taktiež

nebankovými subjektami - poisťovňami, či investičnými fondami.

V súčasnej dobe sú cenné papiere vydávané spoločnosťami založenými za týmto účelom (special purpose vehicle - SPV). Spoločnosť SPV v podstate nakúpi aktíva od pôvodcu (napríklad banky). Zdroje k nákupu sú získané od investorov, pretože SPV sama o sebe nemá žiadne vlastné zdroje. SPV je samostatná spoločnosť a je tzv. bankruptcy remote od pôvodcu pohľadáviek. To znamená, že ak niektoré aktíva zlyhajú, nebude to mať žiadny vplyv na pôvodcu (vzhľadom k tomu, že tieto aktíva už nie sú súčasťou ich výkazov). A naopak, pokiaľ zlyhá pôvodca samotný, tak to nemá žiadny vplyv na SPV. Vďaka tomuto prevodu banka už nie je vlastníkom týchto aktív a tak nemusí zadržiavať spomenutých 8% na tieto nelikvidné aktíva.

V jednoduchosti proces funguje nasledujúcim spôsobom:

1. Banka poskytne úvery; úvery s rovnakými charakteristikami (cash flow, výška sadzby, splatnosť a iné) zhromaždí do balíkov
2. Banka predá balík úverov nebankovej inštitúcii, na ktorú sa nevzťahuje banková regulácia. Banka ale zvyčajne spravuje úvery až do okamihu splácania a vystupuje ako administrátor
3. Správca vystaví na budúci cash flow z balíku úverov postupované cenné papiere, ktoré prevezmú na umiestnenie na finančnom trhu ručiteľským spôsobom sprostredkovateľa
4. Správca zvýši bonitu postupovaných cenných papierov obstaraním akreditívu alebo iného typu záruky
5. Správca zabezpečí ohodnotenie bonity postupovaného cenného papiera ratingovou agentúrou
6. Investiční sprostredkovatelia predajú postupované cenné papiere s určitým ziskom koncovým investorom
7. Peňažné toky po odrátaní príslušných provízií sú postupované prostredníctvom administrátora a správcu koncovým investorom.

1.1 Dôvody vzniku sekuritizovaných produktov

Dôvodov vzniku ABS je niekoľko a musíme ich rozdeliť aj podľa toho, z ktorého pohľadu sa na tieto dôvody pozeráme - z pohľadu pôvodcu pohľadávok alebo

investora.

Z pohľadu pôvodcu pohľadávok:

Azda najsilnejšou pohnútkou pre regulované subjekty je zníženie požiadaviek na kapitálovú primeranosť. Pri sekuritizácii dôjde k „vyčisteniu“ bilancie a teda k uvoľneniu kapitálu, ktorý je zadržovaný z dôvodov regulátornych predpisov. Ďalšou významnou veličinou je aj prenos rizika, neočakávané realizované výnosy (na ktoré by sa inak muselo čakať až do doby splatnosti), zvýšenie likvidity, či diverzifikácia financovania.

Predovšetkým pre spoločnosti s nižším ratingom tento proces predstavuje taktiež lacnejšiu formu financovania - pri poskytnutí financovania tejto spoločnosti sa zohľadňuje rating daných pohľadávok a nie spoločnosti ako takej. Pokiaľ má teda spoločnosť pohľadávky s vysokou kvalitou, cena financovania sa môže znížiť.

Proces sekuritizácie taktiež znižuje rozdiely medzi štruktúrou aktív a pasív, umožňuje mimobilančné financovanie a zohľadňuje budúce finančné toky (prevod pohľadávok fakticky oceňuje hodnotu budúcich tokov).

Z pohľadu investora:

Sekuritizované produkty majú spravidla vyšší výnos než rovnako ohodnotené neštrukturované produkty (napríklad dlhopisy či cenné papiere súkromných firiem, ktoré majú zväčša pri rovnakom ratingu AAA výrazne nižšie výnosy), navyše sekuritizované cenné papiere sú zaistené cash flow, či aktívami samotnými. Taktiež dávajú príležitosť k investícii do špecifického portfólia aktív vysokej kvality (napríklad možnosť poisťovne investovať do spotrebiteľských pôžičiek, či hypoték). Okrem iného dochádza tiež k diverzifikácii portfólia a izolácii úverového rizika materskej spoločnosti.

1.2 Druhy sekuritizovaných produktov

Sekuritizované produkty se delia podľa viacerých kritérií:

Delenie podľa aktív:

- *hypotekárne úvery*
- *spotrebiteľské úvery*
- *úvery na autá*
- *leasingové pohľadávky*

- *non-performing loans*
- *pohľadávky z nájmov*
- *pohľadávky z kreditných, či debetných kariet*
- *pohľadávky z autorských práv*
- *budúce peňažné toky*
- *iné - prakticky akékoľvek aktívum zaistujúce budúci peňažný tok.*

Delenie podľa techniky:

- *true sale* (právny prevod podkladových aktív - postúpenie pohľadávok)
- *synthetic* (prenos rizika bez prevodu podkladových aktív - táto technika je založená na bázi finančného derivátu, keď kupujúci rizika sa zaviazuje predávajúcemu, že mu k nejakému data uhradí určitú čiastku odpovedajúcu súčasnej hodnote očakávaných peňažných tokov, ktoré by dané podkladové pohľadávky mali vygenerovať).

Delenie podľa investorov:

- *verejné* (voľný trh s možnosťou účasti širokej verejnosti)
- *privátne* (trh s obmedzenou skupinou vybraných investorov)
- *conduit* (sekuritizované cenné papiere sú umiestnené do tzv. konduitu, zväčša spoločnosť patriaca významnej bankovej, či investorskej skupine, ktorá sa špecializuje výhradne na nákup sekuritizačných a obdobných cenných papierov).

Delenie podľa počtu prevodov:

- *jednorazová* (pohľadávky sú postúpené len raz a nasleduje už vymáhanie)
- *opakujúca sa*; rozlišujú sa dve rôzne obdobia:
 1. Revolvingové (nakupujú sa neustále nové pohľadávky a príjmy sú použité na nákup ďalších pohľadávok)

2. Amortizačné (žiadne pohľadávky už nakupované nie sú, všetky príjmy sa použijú na úhradu istiny a úrokov).

Delenie podľa štruktúry:

- *master trust* (spravidla pre kreditné karty portfólio pohľadáviek je prenesené do trustu a trust emituje cenné papiere)
- *issuance trust* (štruktúra pre kreditné karty - menšie požiadavky ako master trust, požaduje tranžovanie)
- *grantor trust* (automobilové a hypotekárne úvery)
- *owner trust* (viac flexibility pri alokácii istiny a úrokov na rôzne tranže).

V nasledujúcich podkapitolách si priblížime dva najrozšírenejšie druhy ABS - cenné papiere podložené hypotekárnymi úvermi (mortgage backed securities - MBS) a niektorým typom komerčných dlhových nástrojov (collateralized debt obligation - CDO).

1.2.1 Cenné papiere typu MBS

Ako podkladové aktívum pre inštrumenty typu MBS slúžia hypotekárne úvery. Hypotekárne úvery sú poskytované hypotekárnou bankou, za výber a smerovanie platieb, rozosielanie výpisov a vypracovanie hlásení je zodpovedný správca, ktorému je vyplácaná odmena vo forme percentuálnej časti nesplatennej istiny. Následne je vyplácaná odmena formou úrokovej marže poisťovni, ktorá poisťuje jednotlivé úvery pre prípad nesplácania a prípad živelných pohrôm.

Investori nakupujú hypotéky na sekundárnom trhu hypoték a následne ich používajú ako kolaterál pri konštrukcii MBS. MBS sú čiastočne garantované štátom a teda sú považované za kvalitné inštrumenty.

1.2.2 Cenné papiere typu CDO

Podkladové portfólio CDO môže byť tvorené rôznymi finančnými inštrumentmi ako sú korporátne dlhopisy, úvery, pôžičky firiem, pohľadávky, ABS, dlhy rozvíjajúcich sa finančných trhov, ale takisto môžu byť tvorené aj inými CDO. Typ podkladových aktív závisí tiež na účele založenia spoločnosti SPV a dôvodoch vytvorenia CDO.

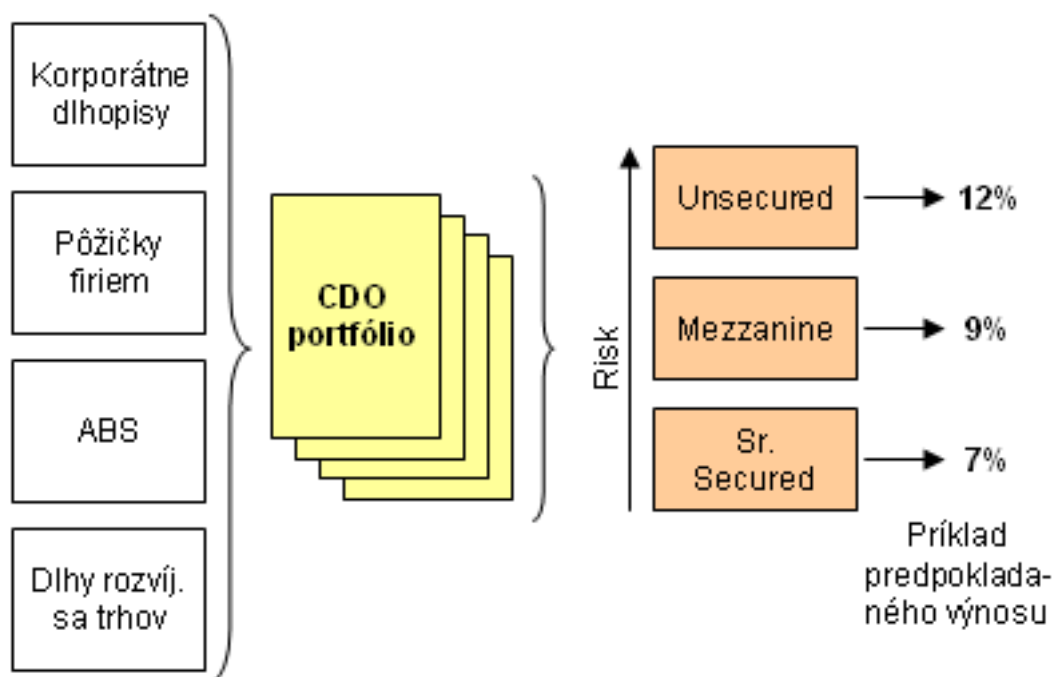
Obečne sa CDO delia podľa pôvodu kolaterálu a zámeru emitenta:

1. Súvahové inštrumenty CDO

Typickým príkladom je snaha bánk o uvoľnenie kapitálu viazaného na aktíva regulátornými predpismi. Ich podkladovými aktívami sú zväčša komerčné dlhové nástroje. Z dôvodov vzniku ABS spomenutých v predchádzajúcich kapitolách patrí k dôvodom vzniku CDO taktiež presunutie rizika, diverzifikácia úverového portfólia, premena nelikviditných aktív na likvidné, či kapitálová arbitráž.

2. Arbitrážne inštrumenty CDO

Tieto inštrumenty sú podložené rizikovými obligáciami (high-yield bonds), odtiaľ tiež označenie CBO (collateralized bond obligation). Tieto inštrumenty vznikajú z popudu investora do najnižšej tranže (viz kapitola 1.3.), ktorý špekuluje na prípadný rozdiel medzi výnosmi z podkladových aktív a sľúbenými platbami nadradeným tranžiam. Tieto rozdiely voláme arbitráž.



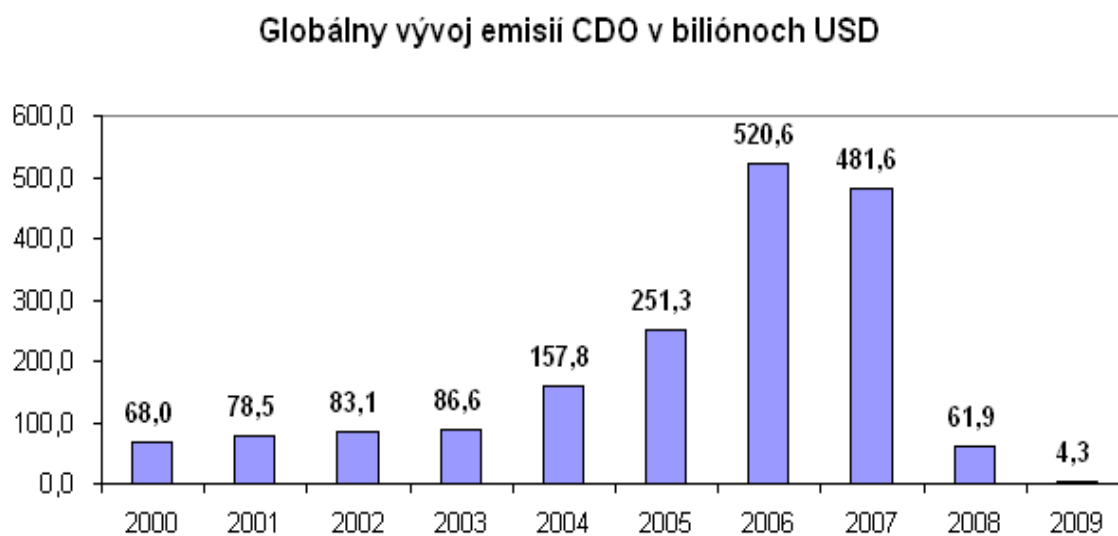
Obrázok 1.1: Príklad schémy CDO papierov

1.2.3 Vývoj emisií CDO

Aj keď vývoj sekuritizácie siaha až do 70. rokov minulého storočia, na význame začala táto oblasť naberať až v roku 2004. Hlavným centrom sa stali Spojené Štáty Americké, no veľmi rýchlo sa preniesla aj do iných častí sveta a stala sa svetovým trendom.

V roku 2006 dosiahol trh s emisiami cenných papierov typu CDO svojho vrcholu s objemom viac ako pol triliónu amerických dolárov. Na prelome rokov 2006 a 2007 sa v USA začala šíriť neistota z amerického nehnuteľnostného trhu, nakoľko menej bonitní dlžníci začali mať pri rastúcich úrokových sadzbách problémy so splácaním. Obrovská nehnuteľnostná bublina praskla a v polovici roku 2007 sa pokles hodnoty nehnuteľností prirodzene prejavil v poklese cien cenných papierov krytých hypotekárnymi úvermi. Tento jav mal za následok spustenie cyklickej reakcie, dnes tiež nazývanej globálna finančná kríza.

V nasledujúcich rokoch došlo nasledovne k výraznému obmedzeniu emisií CDO, ktoré vyústilo až do takmer úplného zastavenia emisií v roku 2009, kde podiel emisií oproti roku 2006 tvorí necelé jedno percento. Vývoj objemu celosvetových emisií zverejnila Asociácia sekuritizačného odvetvia a finančných trhov (SIFMA):



Obrázok 1.2: Objem emisií CDO podľa SIFMA

Čo teda ale tak veľkú zmenu v cenách CDO spôsobilo? S odstupom niekoľkých rokov prevláda názor, že investori sa spoliehali výhradne na rating poskytovaný ratingovými agentúrami. Bohužiaľ toto nie je možné ani v dnešných dňoch úplne regulovať, nakoľko sa jedná o príliš zložité produkty.

V skutočnosti ratingy neodrážali vo všetkých prípadoch realitu. Rating, ktorý poskytuje významnú informáciu o pravdepodobnosti zlyhania, bol v skutočnosti omnoho nižší. Nesprávne určenie niektorých faktorov (napríklad pravdepodobnosti zlyhania, či miery návratnosti) môže mať vážne následky na finančné zdravie veriteľov. Podcenenie a zlé ocenenie rizika malo za následok kolaps finančného systému. Za zmienku stojí fakt, že agentúry ohodnocovali CDO ratingom AAA - teda rovnakým, aké majú vládne dlhopisy a obligácie súkromných firiem s omnoho nižšími výnosmi. Vo väčšom detaile sa tejto téme budeme venovať v štvrtej kapitole, kde taktiež rozoberieme možné scenáre stresového testovania s použitím reálnych dát.

1.3 Tranže

Väčšina cenných papierov je vydávaná v separátnych „tranžiach“, inak tiež povedané triedach, ktoré majú rozdielne triedy rizika, či dátum splatnosti. Tranže sú vydávané spoločnosťou SPV.

ABS môže mať ľubovoľné množstvo tranží, bežné je napríklad usporiadanie do 6 tranží (A až E plus equity tranža). Najvyššia tranža A má najvyšší rating (podľa teórie väčšinou AAA), ktorý je podporovaný nižšími tranžami a je tým menej rizikový. Nižšie triedy dostávajú väčší kupón ako kompenzáciu za väčšie riziko. Najnižšia tranža (equity) nemusí mať dokonca ani rating a nemusí byť ponúkaná širokej verejnosti. Veľmi pravdepodobne si ju necháva emitent, či správca portfólia. Nižšie tranže platia za prípadné straty; pokiaľ sú straty veľké, stratu pocíti taktiež tranža triedy A.

Väčšina produktov je postavená na sekvenčných výplatách tranží, kde najvyššia tranža dostáva platby istiny, až pokiaľ všetci investori tranže nie sú vyplatení. Potom dostáva platby istiny ďalšia tranža atd., až pokiaľ sú všetci investori vyplatení. Investori do najnižšej tranže spravidla nie sú vyplatení a môžu teda pocítiť väčšiu stratu.

Tranža		Rating
Tranža A-1 pohyblivý kupón	Tranža A-2 pevný kupón	AAA alebo AA
Tranža B-1 pohyblivý kupón	Tranža B-2 pevný kupón	A
Tranža C pohyblivý alebo pevný kupón		BBB
Tranža D pohyblivý alebo pevný kupón		BB
Najnižšia tranža (Equity)		-

Obrázok 1.3: Príklad štruktúry tranží

Prerozdeľovanie finančných tokov - payment waterfall

Príjmy z pohľadávok, ktoré boli v rámci sekuritizácie postúpené na SPV, sa musia určitým spôsobom rozdeľovať tak, aby došlo k pokrytiu všetkých záväzkov spoločnosti SPV. Rozdeľovanie robí tzv. cash manager na základe jasne stanovených pravidiel v sekuritizačnej dokumentácii. Alokácii platieb sa hovorí prerozdeľovanie finančných tokov (payment waterfall).

Príjmy sa spravidla delia hneď na 2 zložky:

1. Splátky na istinu postúpených pohľadáviek
2. Splátky na úroky a poplatky daných pohľadáviek

Sekuritizačná dokumentácia potom nastaví jasné poradie využitia príslušných platieb, pričom splátky istiny bývajú alokované nasledujúcim spôsobom (CDO môže mať ľubovoľné množstvo tranží):

1. Úhrada záväzkov z istiny cenných papierov v tranži triedy A
2. Úhrada záväzkov z istiny cenných papierov v tranži triedy B

3. Úhrada záväzkov z istiny cenných papierov v tranži triedy C
4. ...
5. Úhrada záväzkov z istiny cenných papierov v tranži triedy equity
6. V prípade zostatku sa čiastka presunie buď na spread account, alebo sa presunie priamo pôvodcovi pohľadávok, ako tzv. odložená časť kúpnej ceny.

Vo vzťahu k splátkam úrokov a poplatkov z daných pohľadáviek, tieto bývajú alokované nasledujúcim spôsobom:

1. Na rezervný účet až do stanovenej výšky
2. Povinné platby - platby daní, odmena správcovi, odmena cash managerovi, platby bankových poplatkov, platby auditorom a iným poradcom SPV, ďalšie zákonné platby a poplatky, platby za účelom zachovania nutných povolení a pod.
3. Platby úrokov na dlhových cenných papieroch tranže triedy A
4. Platby úrokov na dlhových cenných papieroch tranže triedy B
5. Platby úrokov na dlhových cenných papieroch tranže triedy C
6. ...
7. V prípade zostatku sa čiastka presunie buď na spread account alebo sa presunie priamo pôvodcovi pohľadáviek ako tzv. odložená časť kúpnej ceny.

1.4 Strany zúčastnené pri transakciách

Pôvodca a spoločnosť SPV

Ako už bolo spomenuté, spoločnosť SPV vzniká len za účelom vydania ABS tranží. Zakladateľom spoločnosti je pôvodca (originator), ktorý často prenáša na SPV podkladové portfólio. Táto transakcia sa vyznačuje nezávislosťou SPV na kreditnom riziku emitentov podkladových aktív a kreditnom riziku pôvodcu.

Manažér aktív

Manažér aktív (asset/collateral manager) je právnická osoba, ktorá je zodpovedná za riadenie a správu podkladového portfólia. Aby sa zhodovali záujmy investorov a manažéra, je buď manažér jedným z investorov, alebo sú jeho odmeny

zviazané s výkonnosťou transakcií.

Správca a platobný agent

Správca (trustee) a platobný agent (paying agent) sú zväčša jedna právnická osoba. Ako správca je zodpovedný za emisiu tranží, reinvestovanie voľných finančných prostriedkov a správu podkladového portfólia. Ako platobný agent je zodpovedný za platby zo strany emitentov podkladových aktív, za plnenie záväzkov voči investorom a tiež za plnenie testov pokrytia a kvality.

Dlhový poistiteľ

U niektorých transakcií uzaviera SPV poistnú zmluvu na seniorné tranže. V prípade nesplnenia podmienok zo strany SPV sa zdrojom investorov stane dlhový poistiteľ (bond insurer). Dlhový poistiteľ vystupuje ako externý zdroj úverového posilnenia. Ratingové agentúry túto skutočnosť navyše hodnotia kladne.

Protistrana zaistenia

Protistrana zaistenia (hedge counterparty/swap provider) poskytuje predovšetkým úrokové zaistenie, aby bolo možné nastaviť peňažné toky z podkladových aktív nárokov plynúcich zo záväzkov investorov. Nakoľko SPV sa vystavuje touto transakciou ďalšiemu riziku, vyžaduje často, aby mala protistrana zaistenia vysoké úverové hodnotenie.

Ratingová agentúra

Ratingová agentúra hrá dôležitú rolu pri vydávaní ABS, keďže udeľuje hodnotenie tranžiam ABS. Agentúra taktiež sleduje hodnotené emisie po celú dobu ich života a hodnotenie mení podľa aktuálnej situácie na trhu.

1.5 Podkladové portfólio

Predtým, než je vôbec možné začať s rozdeľovaním do tranží, je nutné si portfólio špecifikovať. Napriek tomu, že medzi širokou verejnosťou prevláda názor, že podkladové portfólio je dopredu zrejmé, je to práve naopak - postupuje sa takzvanou metódou „top down“, t.j. na začiatku si správca portfólia musí určiť, aké kritéria bude portfólio spĺňať a následne začne zostavovať portfólio. Ďalšou alternatívou je, že správca už má polovicu portfólia a na jej základe bude konštruovať druhú polovicu (kde vezme do úvahy hraničné hodnoty). Základnou požiadavkou CDO je, že musí generovať dostatočný výnos z kupónov, aby mohli byť vysporiadané záväzky strán zúčastnených pri transakcii a zároveň aby táto transakcia stále mala atraktívny výnos pre potenciálnych investorov.

Medzi vlastnosti, ktoré sa na portfóliu predovšetkým sledujú, patria:

- Rozmanitosť portfólia (prevažne priemysel)
- Vážený priemerný rating faktor (weighted average rating factor - WARF)
- Vážená priemerná maturita (weighted average maturity - WAM)
- Vážený priemerný spread (weighted average spread - WAS).

V poslednej dobe sa predovšetkým prihliada k rozmanitosti portfólia, nakoľko táto vlastnosť zaručuje, že dobre diverzifikované portfólio bude mať nižšiu volatilitu nominálnej hodnoty než slabo diverzifikované portfólio a taktiež bude viac odolné voči problémom s likviditou. Manažér portfólia je väčšinou nútený vykonať niektoré testy, ako napríklad test priemernej životnosti, test minimálnej diverzifikácie, či minimálny vážený spread.

Pre objasnenie stanovenia portfólia si vysvetlíme v nasledujúcej časti vyššie spomenuté základné faktory nutné pri stanovovaní portfólia.

1.5.1 Základné pojmy

Rozmanitosť portfólia

Agentúra Moody's udáva index rozmanitosti portfólia založený na predpoklade, že väčší počet korelovaných úverov prejaví rovnakú odchýlku návratnosti ako malý počet nekorelovaných úverov. Napríklad desať úverov z desiatich priemyselných odvetví má index rozmanitosti desať, zatiaľ čo desať úverov v rovnakom priemysle má index rozmanitosti štyri. Okrem rozmanitosti priemyslu má Moody's taktiež index geografickej rozmanitosti pre rozvíjajúce sa trhy. My sa budeme zaoberať len indexom rozmanitosti priemyslu.

Index rozmanitosti spočítame zo vzťahu (viz [2])

$$D = D_{Moody's}^1 N_1 + D_{Moody's}^2 N_2 + \dots + D_{Moody's}^{10} N_{10}, \quad (1.1)$$

kde $D_{Moody's}^I = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8I}}{2}$, I je počet firiem v rovnakom priemyselnom odvetví a N_I je počet prípadov, keď je v rovnakom odvetví i firiem. Inak tiež povedané, heterogénne portfólio, ktoré je tvorené N aktívami, môžeme modelovať pomocou homogénneho portfólia tvoreného D aktívami (kde D je index rozmanitosti).

WARE

Priemerný ratingový faktor sa počíta ako vážený priemer všetkých faktorov cenných papierov v portfóliu, kde váha predstavuje nominál daného papiera. Hodnoty ratingových faktorov určuje agentúra Moody's a je možné si ich prehliadnúť v nasledujúcej tabuľke:

Kategória	Rating faktor	Kategória	Rating faktor
Aaa	1	Ba1	940
Aa1	10	Ba2	1350
Aa2	20	Ba3	17000
Aa3	40	B1	2220
A1	70	B2	2720
A2	120	B3	3490
A3	180	Caa	6500
Baa1	260	Ca	10000
Baa2	360	C	10000
Baa3	610		

Tabuľka 1.1: Ratingové faktory - Moody's

WAM

Vážená priemerná maturita (doba do splatnosti) je vážený priemer dôb do splatnosti príslušných aktív, kde váha predstavuje nominál daného papiera.

WAS

Vážený priemerný spread sa počíta ako vážený priemer všetkých spreadov cenných papierov v portfóliu, kde váha predstavuje nominál daného papiera. Spread predstavuje návratnosť medzi kupónom po zlyhaní a finančné náklady pre ostatné záväzky.

1.5.2 Voľba podkladového portfólia

Ako už bolo na začiatku tejto kapitoly zmienené, najprv je potrebné podkladové portfólio špecifikovať. Manažér portfólia si musí určiť základné kritéria, ktoré by portfólio malo spĺňať - musí sa vymyslieť spôsob, s akým portfóliom sa má pracovať, ak cieľové portfólio nie je známe. Investor, naopak, pozná len parametry a konštruuje samotné portfólio. V tejto kapitole sa pokúsime splniť rolu investora a skonštruujeme fiktívne portfólio tak, že si určíme základné hodnoty - okrem už

popísanej rozmanitosti, *WARF*, *WAM* a *WAS* sa taktiež môžu objaviť ďalšie obmedzujúce kritériá, ako najlepší a najhorší rating, maximálny nominál, ktorý môže mať jednotlivý cenný papier vzhľadom k celkovému nominálu portfólia, či celkový nominál jedného odvetvia nesmie prevyšovať vopred určený podiel na celkovom portfóliu.

Vzhľadom na to, že doba do splatnosti je nezávislá na ostatných veličinách, najprv si stanovíme dobu do splatnosti jednotlivých cenných papierov, ktoré sa stanovujú napríklad výberom z normálneho rozdelenia

$$N(\mu, \sigma^2).$$

kde $\mu = WAM$ a $\sigma^2 = WAM^{\frac{1}{8}}$. Stanovenie týchto hodnôt vychádza z [2]. Táto stredná hodnota a rozptyl boli vyhodnotené ako najvhodnejšie na základe analýzy reálnych dát CDO dlhopisov uskutočnenej v České Spořitelne.

V ďalšom kroku si stanovíme najlepší a najhorší rating, ktorý dané portfólio má mať. V našom prípade si stanovíme napríklad Baa3 až B2. Ratingy pre jednotlivé cenné papiere si vygenerujeme pomocou *B*-rozdelenia

$$B(3, 2),$$

ktoré sa vzhľadom ku konzervatívnosti - viac horších ratingov - hodí, nakoľko je vychýlené. Keď sme si teda stanovili najhorší a najlepší rating, vieme rozsah ratingov - v našom prípade 6. Interval (0,1) si teda rozdelíme na 6 menších intervalov a vygenerované hodnoty z *B*-rozdelenia priradíme konzervatívne príslušným ratingom.

Ako ďalšiu si stanovíme hodnotu *WARF*. Vygenerujeme *WARF* na nami určenom portfóliu a porovnáme. Pokiaľ je nami vygenerovaný *WARF* vyšší, než stanovený, náhodným rozdelením zlepšime niektoré ratingy, prípadne v opačnom prípade zhoršíme. Toto opakujeme až do doby, než sa dostaneme na požadovaný *WARF*. Pri tejto procedúre ale nesmieme zároveň zabúdať na to, že máme určený minimálny a maximálny rating. Pokiaľ sa v procedúre dostaneme k týmto krajným hodnotám, ponecháme ich bez zmeny a vygenerujeme iný cenný papier.

Následuje určenie spreadu - každému spreadu náleží rating. K priradeniu spreadu použijeme tabuľku pravdepodobností zlyhania firmy Moody's.

Rok	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2
1	0.0042	0.0087	0.0156	0.0281	0.0468	0.0716
2	0.0105	0.0202	0.0347	0.0551	0.0838	0.1167
3	0.0171	0.0313	0.0518	0.0787	0.1158	0.1555
4	0.0238	0.042	0.068	0.0979	0.1385	0.1813
5	0.0305	0.0528	0.0841	0.1186	0.1612	0.2071
6	0.037	0.0625	0.0977	0.1349	0.1789	0.2265
7	0.0433	0.0706	0.107	0.1462	0.1913	0.2401
8	0.0497	0.0789	0.1166	0.1571	0.2023	0.2515
9	0.0557	0.0869	0.1265	0.1671	0.2124	0.2622
10	0.061	0.094	0.135	0.1766	0.222	0.272
11	0.076968	0.112618	0.148267	0.196134	0.243986	0.291839
12	0.084879	0.122994	0.161109	0.210794	0.260463	0.310133
13	0.092738	0.133141	0.173544	0.224736	0.275912	0.327089
14	0.100521	0.143037	0.185554	0.237982	0.290395	0.342808
15	0.108205	0.152665	0.197125	0.250557	0.303973	0.357389
16	0.115773	0.162014	0.208254	0.262489	0.316708	0.370926
17	0.123213	0.171077	0.218942	0.273808	0.328659	0.383509
18	0.130511	0.179853	0.229194	0.284547	0.339882	0.395218
19	0.137662	0.188341	0.23902	0.294735	0.350432	0.40613
20	0.144658	0.196545	0.248432	0.304403	0.360357	0.416312
21	0.151496	0.204469	0.257442	0.313582	0.369705	0.425827
22	0.158172	0.212119	0.266066	0.3223	0.378516	0.434732
23	0.164686	0.219503	0.274319	0.330584	0.386831	0.443078
24	0.171038	0.226628	0.282218	0.33846	0.394686	0.450912
25	0.177228	0.233502	0.289777	0.345954	0.402115	0.458275
26	0.183257	0.240135	0.297013	0.353088	0.409147	0.465205
27	0.189127	0.246534	0.303941	0.359884	0.415811	0.471737
28	0.194841	0.252709	0.310577	0.366363	0.422133	0.477902
29	0.200402	0.258668	0.316935	0.372544	0.428136	0.483728
30	0.205812	0.264421	0.32303	0.378444	0.433842	0.48924

Tabuľka 1.2: Pravdepodobnosti zlyhania

Podľa určeného ratingu a doby do splatnosti teda priradíme každému papieru spread. Napríklad pre papier s ratingom Baa3 so splatnosťou 2,34 rokov máme z

tabuľky pravdepodobnosť zlyhania 0,0105. Vzhľadom k tomu, že pre naše výpočty potrebujeme hodnotu za 1 rok, vydáme pravdepodobnosť zlyhania dvoma a dostaneme výslednú hodnotu 0,00525. Spread tohoto cenného papiera je teda 52,5 bp.

Takto budeme pokračovať pre všetky cenné papiere, až dôjdeme k hodnote *WAS*. Pokiaľ sa vygenerovaný *WAS* a nami určený *WAS* odlišuje, znížime každému cennému papieru hodnotu spreadu o požadovaný rozdiel.

Poslednou podmienkou pre určenie portfólia je index rozmanitosti. Zo vzťahu (1.1) generujeme náhodným rozdelením hodnotu N_i . Jedná sa o úlohu lineárneho programovania, ktorá sa môže riešiť napríklad pomocou excelovského modulu *Riešiteľ*. Tento modul je určený pre riešenie lineárnych i nelineárnych úloh matematického programovania.

Konečne si teda môžeme vytvoriť vlastné fiktívne portfólio, pre ktoré si určíme nasledujúce podmienky:

- 50 cenných papierov
- Priemerná doba do splatnosti 8 rokov
- Celková nominálna hodnota portfólia 100 miliónov eur
- WARF 1900
- WAS 250 bp
- Index rozmanitosti 30.

CP	Nominál	Maturita	Rating	WARF	Spread	Sektor
1	3	9	B1	2220	274	Automobilový
2	2	9	Ba3	1700	218	Bankovníctvo
3	1	8	Ba1	940	122	Chémia, plasty a odpad
4	1	7	B1	2220	320	Elektronika
5	2	9	Ba3	1700	218	Financie
6	4	8	Baa3	610	83	Nafta a plyn
7	2	8	Ba2	1350	174	Nafta a plyn
8	1	6	B2	2720	436	Nápoje, jedlo a tabak
9	3	9	B1	2220	274	Nápoje, jedlo a tabak
10	2	6	B1	2220	344	Nápoje, jedlo a tabak
11	2	7	Ba1	940	126	Osobná doprava
12	4	8	Ba3	1700	230	Osobná doprava
13	1	6	Ba2	1350	190	Osobná doprava
14	2	10	Ba3	1700	207	Osobná doprava
15	1	8	B1	2220	295	Poistovníctvo
16	2	9	Ba3	1700	218	Poistovníctvo
17	3	6	B2	2720	436	Poistovníctvo
18	1	9	Ba2	1350	167	Poistovníctvo
19	1	10	B1	2220	258	Skladovanie
20	4	8	B1	2220	295	Skladovanie
21	3	8	B1	2220	295	Skladovanie
22	1	8	B1	2220	295	Skladovanie
23	1	9	B1	2220	274	Stavebníctvo
24	2	8	B1	2220	295	Stavebníctvo
25	1	9	B2	2720	336	Stavebníctvo
26	4	9	Ba2	1350	167	Stavebníctvo
27	1	8	Ba3	1700	230	Telekomunikácie
28	2	10	B2	2720	313	Telekomunikácie
29	3	10	Ba1	940	118	Telekomunikácie
30	1	8	Ba2	1350	174	Telekomunikácie
31	2	9	B2	2720	336	Textil a koža
32	1	10	Ba2	1350	162	Textil a koža
33	3	9	Ba2	1350	167	Textil a koža
34	2	9	Ba2	1350	167	Textil a koža
35	3	9	Ba2	1350	167	Textil a koža
36	2	7	Ba2	1350	184	Textil a koža
37	1	10	B1	2220	258	Vzdušný priestor a obrana
38	1	9	B1	2220	274	Vzdušný priestor a obrana
39	3	7	B1	2220	320	Vzdušný priestor a obrana
40	1	9	B1	2220	274	Vzdušný priestor a obrana
41	2	10	Ba3	1700	207	Vzdušný priestor a obrana
42	3	9	B2	2720	336	Vzdušný priestor a obrana
43	1	8	Ba1	940	122	Vzdušný priestor a obrana
44	4	9	B2	2720	336	Zdroje
45	1	7	B2	2720	399	Zdroje
46	2	9	B2	2720	336	Zdroje
47	1	8	Ba3	1700	230	Zdroje
48	3	7	B1	2220	399	Zdroje
49	2	8	Ba3	1700	230	Zdroje
50	1	8	Ba3	1700	230	Zdroje

Tabuľka 1.3: Zostavené fiktívne portfólio

K všetkým výpočtom fiktívneho podkladového portfólia (okrem funkcie *Riešiteľ* v programe MS Excel) bol použitý program *R*, ktorý prípravu podkladov, podmienok i samotné výpočty oproti iným programom (napríklad Excel) výrazne zjednodušil a sprehľadnil. Maturita bola zaokrúhlená kvôli konzervatívnosti na celé čísla smerom hore.

Kapitola 2

Testy pokrytia, oceňovacie metódy CDO, finančné toky

V nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať testami pokrytia, ktoré majú vplyv na prerozdeľovanie záväzkov voči investorom, ktorí do CDO tranží investovali a metódami oceňovania CDO transakcií, kde skrátené popíšeme najbežnejšie metódy. Zameriame sa predovšetkým na metódu modelovania ratingov pomocou Markovových reťazcov a generovaním dôb do zlyhania pomocou kopula funkcií.

2.1 OC test

Definícia 2.1: *Povieme, že CDO transakcia splňuje OC test, pokiaľ*

$$r_{OC,j} = \frac{p_{PF}}{\sum_{i=1}^j P_i} \geq t_{OC,j}, \quad (2.1)$$

kde $r_{OC,j}$ je koeficient pre j -tú tranžu, $t_{OC,j}$ je vopred definovaná spúšľacia (trigger) hodnota pre j -tú tranžu (väčšia ako 100%), p_{PF} je aktuálny nominál celého portfólia bez zlyhaní a P_j aktuálna veľkosť j -tej tranže.

Over-collateralization test (možné preložiť ako test prezaistenia) overuje, či suma trhovej ceny každého aktíva krát zálohová platba každého aktíva je väčšia ako nominál na každej ratingovej hladine. Kalkulácia OC testu je zvyčajne vyžadovaná každý týždeň, či raz za dva týždne.

Pokiaľ straty na trhovej cene CDO transakcií spôsobia prepád pod túto minimálnu požiadavku, CDO zlyhalo v OC teste a je nutné predávať aktíva do tej doby, než štruktúra opäť dosiahne stanovenú hranicu. Taktiež je možné, aby držitelia CDO všetkých tranží prispeli aktívami, aby CDO prešlo OC testom. Pokiaľ

zlyhajú obe možnosti počas tejto „ozdravnej“ fázy, nastane čas zlyhania a držiteľ najseniornejšej tranže môže prevziať kontrolu nad CDO a jeho aktívami.

2.2 IC test

Definícia 2.2: *Povieme, že CDO transakcia splňuje IC test, pokiaľ*

$$r_{IC,j} = \frac{i_{PF}}{\sum_{i=1}^j I_i} \geq t_{IC,j}, \quad (2.2)$$

kde $r_{IC,j}$ je koeficient pre j -tú tranžu, $t_{IC,j}$ je vopred definovaná spúšľacia (trigger) hodnota pre j -tú tranžu (väčšia ako 100%), i_{PF} je súčet kupónov podkladového portfólia za posledné úrokové obdobie a I_j kupón splatný v prospech j -tej tranže za posledné úrokové obdobie.

Interest coverage test (možné preložiť ako test pokrytia úrokov) je v skratke pomer úrokov z CDO aktív voči kupónu tranže CDO, čiže testujeme, či je zaisťovaný dostatočný úrokový príjem pre výplatu kupónov dlhových tranží aj napriek prípadným stratám na portfóliu.

Pri nesplnení testu sa postupuje rovnako, ako pri nesplnení OC testu.

2.3 Oceňovacie metódy CDO

2.3.1 Základné pojmy

Doba do zlyhania

V dobe do zlyhania (distance to default) budeme predpokladať spojitost distribúcie času a je nutné mať určený presný začiatok, ako aj presne definovať zlyhanie. Za začiatok sa zväčša volí súčasnosť, pojem zlyhanie je definovaný agentúrou Moody's ako omeškanie platby úrokov, či istiny včítane omeškaných platieb v dobe odkladu. Doba do zlyhania teda určuje čas T , ktorý plynie od súčasnosti do okamihu zlyhania. Ďalej predpokladajme, že T má distribučnú funkciu $F_T(t)$ (sprava spojitá) a hustotu $f_T(t)$. Pri nesplnení testu sa postupuje rovnako, ako pri nesplnení OC testu.

Funkcia prežitia

Funkcia prežitia (survival function) je definovaná nasledujúcim spôsobom

$$S(t) = P[T > t] = 1 - F(t) = \int_t^\infty f_T(\tau) d\tau; \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Funkcia $S(t)$ teda udáva pravdepodobnosť, že v intervale $(0, t)$ k zlyhaniu nedôjde.

Pre lepšiu orientáciu zavedieme označenie ${}_tq_x$ vyjadrujúce pravdepodobnosť zlyhania obligácie do času $x + t$ za podmienky, že k zlyhaniu nedošlo do začiatku roku x . Naopak, ${}_tp_x$ udáva pravdepodobnosť, že obligácia, ktorá nezlyhala v roku x , nezlyhá ani v roku $x + t$. Značenie je nasledujúce:

$${}_tq_x = P(T - x \leq t \mid T > x), \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T - x > t \mid T > x), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Postupnosť q_0, q_1, \dots, q_n je v diskretnom modele označovaná ako kreditná krivka.

Intenzita rizika

Funkciou, ktorú je nutné si ďalej definovať, je intenzita rizika, ktorá vyjadruje okamžitú pravdepodobnosť zlyhania obligácie. Matematicky vyjadrené

$$P(x < T \leq x + \Delta x \mid T > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}, \quad (2.6)$$

kde $h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$ je nazývaná mierou intenzity (hazard rate) a udáva približne pravdepodobnosť zlyhania v intervale $(x, x + 1)$ za podmienky, že do okamžiku x k zlyhaniu nedošlo.

Vzťah medzi intenzitou, distribučnou funkciou a funkciou prežitia je nasledujúci

$$h(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}, \quad (2.7)$$

čo si ďalej môžeme vyjadriť (za pomoci začiatkovej podmienky $S(0) = 1$) ako

$$S(t) = e^{-\int_0^t h(s) ds} \quad (2.8)$$

a pomocou miery náhodnosti dostaneme

$${}_tq_x = 1 - e^{-\int_0^t h(s+x)ds}, \quad (2.9)$$

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t h(s+x)ds}. \quad (2.10)$$

Okrem toho ešte platia nasledujúce vzťahy:

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(s)ds}, \quad (2.11)$$

$$f(t) = S(t) \cdot h(t). \quad (2.12)$$

Rozloženie dôb do zlyhania

Pre prax býva typickým predpokladom konštantnosť intezity na určitom intervale (napríklad $[x, x + 1]$), z čoho nasledovne dostaneme

$$f(t) = he^{-ht}, \quad (2.13)$$

a teda rozloženie doby do zlyhania je exponenciálne s parametrom h . Vidíme tiež, že modelovanie doby do zlyhania je ekvivalentné modelovaniu intezity, ktoré sme pred chvíľou popísali (modelovanie intezity môže byť ľahko prispôsobené omnoho komplikovanejším situáciám). Intenzita navyše poskytuje okamžitú informáciu o riziku zlyhania každej obligácie v akomkoľvek okamihu.

Združená funkcia prežitia, korelácia zlyhaní

Majme obligácie A a B a ich doby do zlyhania T_A a T_B . Združená funkcia prežitia pre doby do zlyhania sa definuje nasledovne

$$S_{T_AT_B}(s, t) = P(T_A > s, T_B > t). \quad (2.14)$$

Pre združenú distribučnú funkciu platí

$$F(s, t) = P(T_A \leq s, T_B \leq t) = 1 - S_{T_A}(s) - S_{T_B}(t) + S_{T_AT_B}(s, t). \quad (2.15)$$

Pomocou dôb do zlyhania môžeme nasledovne definovať koreláciu medzi dobami do zlyhania pre obligácie A a B ako

$$\rho_{T_AT_B} = \frac{\text{cov}(T_A, T_B)}{\sqrt{\text{Var}(T_A)\text{Var}(T_B)}}. \quad (2.16)$$

Kreditná krivka

Vzhľadom k podobnosti s výnosovou krivkou býva intenzita rizika označovaná ako kreditná krivka. Predpokladajme, že poznáme rating daného inštrumentu. V tom prípade môžeme využiť historické informácie o pravdepodobnosti zlyhania. Jednotlivé ratingové agentúry zverejňujú pravidelne štúdie založené na dlhodobom pozorovaní zlyhaní (napríklad Moody's, či S&P) a nasledovne zverejňujú ročné, či viacročné pravdepodobnosti zlyhania (viď napríklad Tabuľka 1.2). Práve z viacročných je potom možné určiť inenzitu rizika.

S využitím

$${}_{n+1}q_x = {}_nq_x + {}_np_x {}_{x+n}q_x \quad (2.17)$$

dostaneme marginálne podmienené pravdepodobnosti zlyhania. Tento vzťah udáva, že pravdepodobnosť zlyhania v intervale $[0, n + 1]$ je rovná pravdepodobnosti zlyhania v $[0, n]$ plus pravdepodobnosti, že zlyhanie nenastane do doby n a zároveň nastane v nasledujúcom roku. Úpravou tohto vzťahu dostaneme

$$q_{x+n} = \frac{{}_{n+1}q_x - {}_nq_x}{1 - {}_nq_x}. \quad (2.18)$$

2.3.2 Miera návratnosti

Miera návratnosti (recovery rate) predstavuje hodnotu, ktorú je možné „zachrániť“ v prípade zlyhania. Odhad tejto miery je veľmi náročný, nakoľko neexistuje trh poskytujúci presné informácie o možnostiach návratností. Rozhodujúci vplyv na odhady mier má predovšetkým typ finančného nástroja a trieda priority nástroja (seniority class). U obligácií rozlišujeme päť tried priorít:

- Prioritná obligácia zaistená (Senior Secured - Sr. Sec.)
- Prioritná obligácia nezaistená (Senior Unsecured - Sr. Unsec.)
- Prioritná obligácia podriadená (Senior Subordinated - Sr. Sub.)
- Podriadená obligácia (Subordinated - Sub)
- Menej významná obligácia (Junior Subordinated - Jr. Sub.).

Zo zdrojov štúdií ratingovej agentúry Moody's môžeme v nasledujúcej tabuľke vidieť vývoj mier návratnosti od roku 1982 až do roku 2008, kedy bola táto štúdia zverejnená.

Rok	Sr.Sec.	Sr.Unsec.	Sr.Sub.	Sub.	Jr.Sub.
1982	72,5%	35,79%	48,09%	29,99%	-
1983	40%	52,72%	43,5%	40,54%	-
1984	-	49,41%	67,88%	44,26%	-
1985	83,63	60,16%	30,88%	39,42%	48,5%
1986	59,22%	52,6%	50,16%	42,58%	-
1987	71%	62,73%	44,81%	46,89%	-
1988	55,4%	45,24%	33,41%	33,77%	36,5%
1989	46,54%	43,81%	34,57%	26,36%	16,85%
1990	33,81%	37,01%	25,64%	19,09%	10,7%
1991	48,39%	36,66%	41,82%	24,42%	7,79%
1992	62,05%	49,19%	49,4%	38,04%	13,5%
1993	-	37,13%	51,91%	44,15%	-
1994	69,25%	53,73%	29,61%	38,23%	-
1995	62,02%	47,6%	34,3%	41,54%	-
1996	47,58%	62,75%	43,75%	22,6%	-
1997	75,5%	56,1%	44,73%	35,96%	30,58%
1998	46,82%	41,63%	44,99%	18,19%	62%
1999	43%	38,04%	28,01%	35,64%	-
2000	39,23%	23,81%	20,75%	31,86%	15,5%
2001	37,98%	21,45%	19,82%	15,94%	47%
2002	48,37%	29,69%	21,36%	24,51%	-
2003	63,46%	41,87%	37,18%	12,31%	-
2004	73,25%	52,09%	42,33%	94%	-
2005	71,93%	54,88%	26,06%	51,25%	-
2006	74,63%	55,02%	41,41%	56,11%	-
2007	80,54%	53,25%	54,47%	-	-
2008	57,98%	33,8%	23,02%	23,56%	-

Tabuľka 2.1: Vývoj mier návratnosti podľa Moody's

V praxi sa pre modelovanie miery návratnosti používa najčastejšie *B*-rozdelenie nadobúdajúce hodnoty medzi 0 a 1, ktoré je dostatočne flexibilné pri zachytení praktických situácií.

Hustota pravdepodobností Beta rozdelenia má tvar

$$f(x, p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad 0 < x < 1. \quad (2.19)$$

Stredná hodnota a rozptyl Beta rozdelenia je

$$\mu = \frac{p}{p+q} \quad a \quad \sigma^2 = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \quad (2.20)$$

2.3.3 Úvod do analytických metód

V tejto kapitole si veľmi stručne popíšeme analytické metódy oceňovania CDO. Vzhľadom na to, že práca sa má zamerať na metódy používajúce Markovove reťazce a kopula funkcie, nebudeme zachádzať do detailov, len pre úplnosť osvetlenia oceňovacích metód spomenieme aj iné.

Metóda binomického vetvenia

Táto technika bola pôvodne zavedená ratingovou agentúrou Moody's a je založená výhradne na koncepte očakávanej straty. Existuje niekoľko metód na odhad očakávanej straty, od Monte Carlo simulačných techník (ktoré sú veľmi presné, avšak ťažkopádne na implementáciu) až po jednoduché modely jednej udalosti (ktoré sú jednoduché na implementáciu, avšak menej presné). Alternatívou k simulácii alebo modelom jednej udalosti je tzv. technika binomického vetvenia (BET), ktorá kombinuje to najlepšie z oboch svetov: vysoký stupeň presnosti spojený s výpočtovou jednoduchosťou (z pohľadu rýchlosti aj implementácie).

BET je priama cesta k odhadu celkovej očakávanej straty. Ponúka niekoľko výhod v určovaní správneho ratingu:

- Započítava všetky scenáre zlyhania, ktoré môžu nastať
- Implementácia je omnoho výpočtovo náročnejšia ako Monte Carlo simulácie
- Výstupom je tzv. analýza stability (či senzitivity)

BET metóda je založená na koncepte indexu rozmanitosti. Idea je používanie indexu rozmanitosti na vybudovanie hypotetického portfólia nekorelovaných a

homegénnych aktív, ktoré budú napodobňovať chovanie zlyhania pôvodného portfólia.

Modifikovaná metóda binomického vetvenia

Táto metóda zahŕňa tri dôležité elementy:

- Predpoklad, že miera návratnosti je náhodná veličina (spravidla diskrétna)
- Berie do úvahy aj smerodajnú odchýlku straty (nie len očakávanú stratu)
- Prináša koncept elasticity očakávanej straty (pre malé zmeny priemernej PD)

Logaritmicko-normálna metóda

Túto metódu je vhodné použiť v prípade veľkého, veľmi homogénneho portfólia. Metóda pre určenie očakávanej straty má nasledujúce kroky:

1. Na základe historických dát sa určí predpoklad o pravdepodobnostnom rozdelení kumulatívneho zlyhania (súčet nominálov aktív, u ktorých došlo behom trvania portfólia k zlyhaniu) pre podkladové aktíva.
2. Pre danú hodnotu kumulatívneho zlyhania sa určia peňažné toky jednotlivým tranžiam a na základe týchto krokov sa určia prípadné straty tranží.
3. Postup opakujeme pre celé spektrum možných kumulatívnych zlyhaní.
4. Vzhľadom na to, že máme pre každú hodnotu kumulatívneho zlyhania aj pravdepodobnosť výskytu tohoto zlyhania, môžeme spočítať vážené straty jednotlivých tranží.

2.3.4 Simulačné metódy - Markovove reťazce

Ratingové agentúry ročne zverejňujú diskkrétne kreditné krivky založené na kohortách (súbor jednotiek, u ktorých došlo v danom období k určitej udalosti) historicky pozorovaných frekvencií zlyhania. Problém s historicky pozorovanými kohortami je, že výsledná niekoľkoročná pravdepodobnosť zlyhania má tendenciu vyzeráť „nasýtená“ v dlhšom horizonte kvôli problému nedostatočnosti dát. Pokiaľ porovnáme pozorovania zlyhania obligácií pred piatich rokov s dnešnými

hodnotami, je jasne vidieť veľké zlepšenie na strane dát. Krivky sú hladšie a neimplikujú nulový forward pravdepodobnosti zlyhania príliš skoro (to znamená, ak napríklad ročná a dvojročná pravdepodobnosťou zlyhania mala rovnakú hodnotu). Každopádne kvalita dát stále nie je dostatočná na to, aby sme sa mohli spoliehať na historické dáta bez vyhladzovania nejakým vhodným modelom. Prístup Markovových reťazcov je elegantný spôsob, ako zvládnuť tento problém a vytvoriť spoľahlivé kreditné krivky.

Pre modelovanie týchto kriviek je potrebné mimo iného poznať pravdepodobnosť, že dôjde k zmene úverového hodnotenia klienta - tzv. rating migration. Spolu s pravdepodobnosťou zlyhania tvoria pravdepodobnosti prechodu a ich maticovému zápisu sa hovorí matica prechodu.

Maticu pravdepodobnosti prechodu z jednej ratingovej kategórie do druhej zverejňujú ratingové agentúry. Pre príklad si uvedieme maticu agentúry Standard&Poors z roku 2009 (1-ročná pravdepodobnosť), kde je možné nájsť ako celosvetové pravdepodobnosti, tak aj regionálne rozdelené na USA, Európu a rozvíjajúce sa trhy. Okrem zvyčajných kategórií ratingov tu nájdeme „D“ pre zlyhanie a „NR“ pre firmy, ktoré už nie sú firmou Standard&Poors ďalej hodnotené (*no-longer rated*):

Z tejto matice môžeme vidieť, že firma s ratingom A bude mať po jednom roku stále rating A s pravdepodobnosťou 84,67% (značíme $p_{A,A}$), postúpiť do ratingu AA s pravdepodobnosťou len 0,36% a naopak klesnúť na BBB s pravdepodobnosťou 7,74%. Posledný riadok so stavom zlyhania D vynechávame, pretože rating sa nemôže z tohto ratingu dostať späť na iný (tj. $p_{D,D}$ je 100%). Preto tomuto stavu hovoríme absorpčný (podrobnejšie viz [8]).

	Z / na	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
Celosvetové	AAA	87,65	8,64	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,70
	AA	0,00	76,17	15,96	0,64	0,21	0,00	0,00	0,00	7,02
	A	0,00	0,36	84,67	7,74	0,43	0,29	0,00	0,21	6,30
	BBB	0,00	0,00	2,00	83,71	5,94	0,80	0,20	0,53	6,81
	BB	0,00	0,00	0,00	3,09	72,95	11,48	0,60	0,70	11,18
	B	0,00	0,00	0,16	0,00	2,29	69,34	8,42	10,14	9,65
	CCC/C	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	6,32	27,37	48,42	17,89
Spojené Státy	AAA	91,67	8,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	AA	0,00	68,68	19,78	1,65	0,55	0,00	0,00	0,00	9,34
	A	0,00	0,18	82,13	10,65	0,54	0,54	0,00	0,18	5,78
	BBB	0,00	0,00	1,82	86,69	5,46	1,12	0,28	0,56	4,06
	BB	0,00	0,00	0,00	2,50	77,29	12,50	0,63	0,83	6,25
	B	0,00	0,00	0,23	0,00	1,96	70,90	8,89	10,16	7,85
	CCC/C	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	6,90	29,66	48,97	14,48
Európa	AAA	90,91	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	9,09
	AA	0,00	76,63	18,48	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,89
	A	0,00	0,43	88,50	5,42	0,00	0,00	0,00	0,22	5,42
	BBB	0,00	0,00	3,55	80,14	8,51	0,35	0,35	0,00	7,09
	BB	0,00	0,00	0,00	3,60	63,06	15,32	0,00	0,90	17,12
	B	0,00	0,00	0,00	0,00	3,95	63,16	10,53	9,21	13,16
	CCC/C	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	7,69	53,85	38,46
Rozvojové trhy	AAA	66,67	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	33,33
	AA	0,00	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	A	0,00	0,54	82,80	9,14	1,61	0,54	0,00	0,54	4,84
	BBB	0,00	0,00	0,98 s	84,59	6,23	0,66	0,00	0,66	6,89
	BB	0,00	0,00	0,00	3,37	73,60	10,11	0,56	0,84	11,52
	B	0,00	0,00	0,00	0,00	1,75	67,11	6,14	9,65	15,35
	CCC/C	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	7,69	19,23	42,31	30,77

Tabulka 2.2: Miera návratnosti podľa agentúry Moody's

V ďalšom kroku sa pozrieme na pravdepodobnosť prechodu po dvoch, či viacerých rokoch. Z teórie náhodných procesov vieme:

Veta 2.1: *Nech $\{X_i, i=1, \dots, k\}$ je homogénny konečný Markovov reťazec s maticou pravdepodobností prechodu \mathbf{P} . Potom pre pravdepodobnosť prechodu n -tého radu platí*

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = p_{ij}^n \quad (2.21)$$

pre všetky celé $m, n \geq 0$, $P(X_m = i) > 0$ a $p_{ij} = P(X_{m+1} = j | X_m = i)$.

K matematicky správne určenie migrácie ratingov je používaná teória Markovových reťazcov, ktorej sme sa už čiastočne dotkli. Predpokladajme, že máme K rôznych stavov (ratingov, kde stav 1=AAA, ..., K =D). Ďalej predpokladajme, že migrácia zo stavu k do stavu l nastane behom krátkeho časového intervalu Δt . Potom pravdepodobnosť migrácie zo stavu k do stavu l sa rovná

$$P(X_{t+\Delta t} = l | X_t = k) = a_{kl}\Delta t. \quad (2.22)$$

V tom prípade sú prvky na diagonále matice P dané ako

$$P(X_{t+\Delta t} = k \mid X_t = k) = a_{kk}\Delta t = 1 - \sum_{l \neq k} a_{kl}\Delta t =: 1 + a_{kk}\Delta t, \quad (2.23)$$

kde

$$a_{kk} = - \sum_{l \neq k} a_{kl}. \quad (2.24)$$

Teda matica pravdepodobností prechodu ratingu pre interval $[t, t + \Delta t]$ je

$$P(t, t + \Delta t) = \mathbf{I} + \Delta t A, \quad (2.25)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matica.

V ďalšom kroku rozšírime interval na $[t, s]$. Ten si môžeme rozdeliť na intervaly s dĺžkou Δ . Matica migrácie ratingov pre n rokov je $P^{(n)}$, teda pre maticu behom dvoch rokov vynásobíme maticu P samu sebou. Interval $[t, s]$ si rozdelíme na dva intervaly, každý s dĺžkou Δ

$$P(t, t + 2\Delta t) = P(t, t + \Delta t)P(t + \Delta t, t + 2\Delta t) = (\mathbf{I} + \Delta t A)(\mathbf{I} + \Delta t A) = (\mathbf{I} + \Delta t A)^2.$$

Rovnaký postup zvolíme pre n rokov

$$P(t, t + n\Delta t) = P(t, s) = (\mathbf{I} + \Delta t A)^n = (\mathbf{I} + \frac{(s - t)}{i} A)^n.$$

Ak je matica prechodu ratingov behom doby od s do t daná ako $P(t, s)$, potom matica prechodu behom doby od t do $s + \Delta t$ daná ako

$$P(t, s + \Delta t) = P(t, s)(\mathbf{I} + \Delta t A) = P(t, s) + \Delta t P(t, s)A. \quad (2.26)$$

Vzhľadom k tomu, že metóda prechodu ratingov je časovo náročná, keďže hodnoty v medzičasoch nemusíme vždy poznať, v nasledujúcej kapitole si popíšeme využitie kopula funkcie, ktorú nasledovne použijeme pre numerickú ilustráciu. V tomto modeli je odstránená nutnosť modelovania zlyhania pre každé obdobie zvlášť a umožňuje generovať okamihy zlyhania priamo.

2.3.5 Simulačné metódy - Kopula funkcie

V nasledujúcom odstavci budeme čerpať predovšetkým z prednášok v rámci Seminára z aktuárskych vied vedenom na MFF UK ako aj z [12]. Kopule sú funkcie, ktoré spájajú jednorozmerné marginálne distribučné funkcie s mnohorozmernými

distribučnými funkciami. Pokiaľ teda máme daných n emitentov a z historických dát môžeme určiť marginálne distribučné funkcie dôb do zlyhania pre jednotlivé obligácie, môžeme pomocou kopulí študovať otázky spojené s celým portfóliom.

Kopule boli po prvýkrát predstavené v roku 1959 A. Sklarom, ako odpoveď M. Frechétovi na otázku týkajúcu sa vzťahu medzi viacrozmernými pravdepodobnostnými distribučnými funkciami a ich menejrozmernými marginálmi. Pre kopule sa okamžite našlo dobré využitie vo financiách a kopule zaznamenali obrovský rozvoj, ktorý trvá až dodnes.

Definícia 2.3: *Povieme, že funkcia $C : I^2 \rightarrow I$, kde I značí interval $[0,1]$, je (dvojrozmerná) kopula, pokiaľ má nasledujúce vlastnosti:*

- (i) $C(0, t) = C(t, 0)$ a $C(1, t) = C(t, 1) = t, \forall t \in I$
- (ii) $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0, \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ také, že $u_1 \leq u_2$ a $v_1 \leq v_2$

Z definície je hneď vidieť, že C je neklesajúca v každej premennej (položme u , či v rovné nule) a spojitá (dokonca rovnomerne spojitá). Tento záver plynie práve z monotónie a trojuholníkovej nerovnosti. Ďalšou z vlastností plynúcich z definície je tzv. Frechétova horná a dolná medza:

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v), \forall u, v \in I$$

Veta 2.2 (Sklar): *Nech H je dvojrozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F a G . Potom existuje kopula C taká, že $H(x, y) = C(F(x), G(y))$, pre všetky x a $y \in R$. Navyše, pokiaľ sú F a G spojité, je C určená jednoznačne. Opačne, pre akékoľvek jednorozmerné distribučné funkcie F a G a akúkoľvek kopulu C , funkcia H definovaná vyššie, je dvojrozmerná distribučná funkcia s marginálmi F a G .*

Ešte stojí za poznámku, že kopula sama je dvojrozmernou distribučnou funkciou a jej marginály majú rovnomerné rozdelenie na I . Pokiaľ sú F a G nezávislé, tak $C(u, v) = uv$.

Príklady dvojrozmerných kopúl

1. Frankova kopula:

$$C_\alpha(u, v) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{(e^{\alpha u} - 1)(e^{\alpha v} - 1)}{e^\alpha - 1} \right], \quad -\infty < a < \infty, \alpha \neq 0. \quad (2.27)$$

2. Gaussovská (normálna) kopula:

$$C_\rho(u, v) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v), \rho), \quad -1 \leq \rho \leq 1, \quad (2.28)$$

kde Φ_2 je distribučná funkcia dvojrozmerného normálneho rozdelenia s korelačným koeficientom ρ a Φ^{-1} je inverzná funkcia jednorozmerného normálneho rozdelenia.

3. Gumbelova kopula:

$$C_\beta^{Gu}(u, v) = \exp[-((- \ln u)^\beta + (- \ln v)^\beta)^{\frac{1}{\beta}}], \quad (2.29)$$

kde $\beta \in [1, \infty]$ je miera závislosti medzi F a G. S rastúcim β rastie aj závislosť medzi F a G.

Simulácie

Majme portfólio tvorené n obligáciami. Ďalej potrebujeme vedieť rating, nominálnu hodnotu, ročný kupón, dobu do splatnosti v rokoch a priemyselný sektor (prípadne región, či štát - kvôli indexu rozmanitosti a koreláciám). Nech máme maticu kreditných korelácií medzi zlyhaniami emitentov obligácií (označíme Σ) a ročné a viacročné pravdepodobnosti zlyhania pre jednotlivé ratingy.

Majme ďalej dobu do zlyhania T_i a jej zodpovedajúcu distribučnú funkciu $F_i(t)$. Pokiaľ použijeme kopulu C, dostaneme združenú distribučnú funkciu dôb do zlyhania definovanú vzťahom

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = C(F_1(t_1), F_2(t_2), \dots, F_n(t_n)). \quad (2.30)$$

Zvolíme n -rozmernú kopulu a dostávame

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = \Phi_n(\Phi^{-1}(F_1(t_1)), \Phi^{-1}(F_2(t_2)), \dots, \Phi^{-1}(F_n(t_n)), \Sigma). \quad (2.31)$$

Ďalej zavedieme náhodné veličiny Y_1, Y_2, \dots, Y_n , pre ktoré platí

$$Y_1 = \Phi^{-1}(F_1(T_1)), \dots, Y_n = \Phi^{-1}(F_n(T_n)). \quad (2.32)$$

Generovanie dôb do zlyhania T_i , $i = 1, \dots, n$ je ekvivalentné s generovaním hodnôt Y_i , $i = 1, \dots, n$. Simuláciu dôb do zlyhania spravíme nasledovne:

1. Vygenerujeme hodnoty Y_1, \dots, Y_n z n -rozmerného normálneho rozdelenia. Za maticu korelačných koeficientov zvolíme maticu kreditných korelácií Σ .
2. Určíme hodnoty distribučných funkcií tohoto mnohorozmerného rozdelenia (kvantily rozdelenia dôb do zlyhania $\Phi(Y_1)$).

3. Kvantily rozdelenia dôb do zlyhania porovnáme s pravdepodobnosťmi zlyhania pre príslušný rating. Tým zistíme, v ktorom roku nastane zlyhanie.
4. Presné doby do zlyhania T_1, \dots, T_n pre jednotlivé obligácie získame pomocou vzťahu $T_i = F_i^{-1}(\Phi(Y_i)), i = 1, \dots, n$

Pre generovanie náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ použijeme opäť program R .

Pre pravdepodobnosť zlyhania v priebehu prvého roku platí: $p_1 = F(1) = 1 - e^{-h_1 \cdot 1}$, $p_0 = 0$. Úpravou vzťahu získame intenzitu pre prvé obdobie: $h_1 = -\ln(1 - p_1)$.

Teda pre pravdepodobnosť zlyhania behom i -tého roku (kde $i = 1, 2, \dots$) platí: $p_i = F(i) = 1 - e^{-h_1 \cdot 1} \cdot e^{-h_2 \cdot 1} \cdot \dots \cdot e^{-h_i \cdot 1}$, $i = 1, 2, \dots$, odkiaľ odvodíme intenzitu pre i -té obdobie

$$h_i = \ln\left(\frac{1 - p_{i-1}}{1 - p_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Ďalej si definujeme vzťah pre výpočet časti roku, v ktorej dôjde k zlyhaniu

$$t_{j,j+1} = \frac{1}{h_{j+1}} \cdot \ln\left(\frac{1 - p_j}{1 - \Phi(Y)}\right), \quad (2.34)$$

kde $t_{j,j+1}$ vyjadruje časť roku medzi j a $j + 1$, h_{j+1} je intenzita pre rok $j + 1$ (viď predchodzie odvodenia), p_j pravdepodobnosť zlyhania v priebehu j -tého roku (tú získame z údajov poskytovaných spoločnosťou Moody's) a $\Phi(Y)$ je kvantil rozdelenia dôb do zlyhania.

2.4 Prerозdeľovanie finančných tokov

V transakcii dochádza k prerозdeľovaniu peňazných tokov z úrokov a istiny a tie sú prerозdeľované podľa kritérií, ktoré boli investorovi vopred oznámené. Tomuto prerозdeľovaniu sa hovorí „waterfall“ (základný princíp sme už vysvetlili v kapitole 1.3.). Podrobnejšie si techniku prerозdeľovania platieb vysvetlíme nižšie s použitím CDO transakcie, aby sme ju priamo vysvetlili.

Príklad: Majme reprezentatívnu CDO transakciu v hodnote 300 miliónov dolárov s „typickou“ štruktúrou cash flow. Transakcia sa skladá z nasledujúceho:

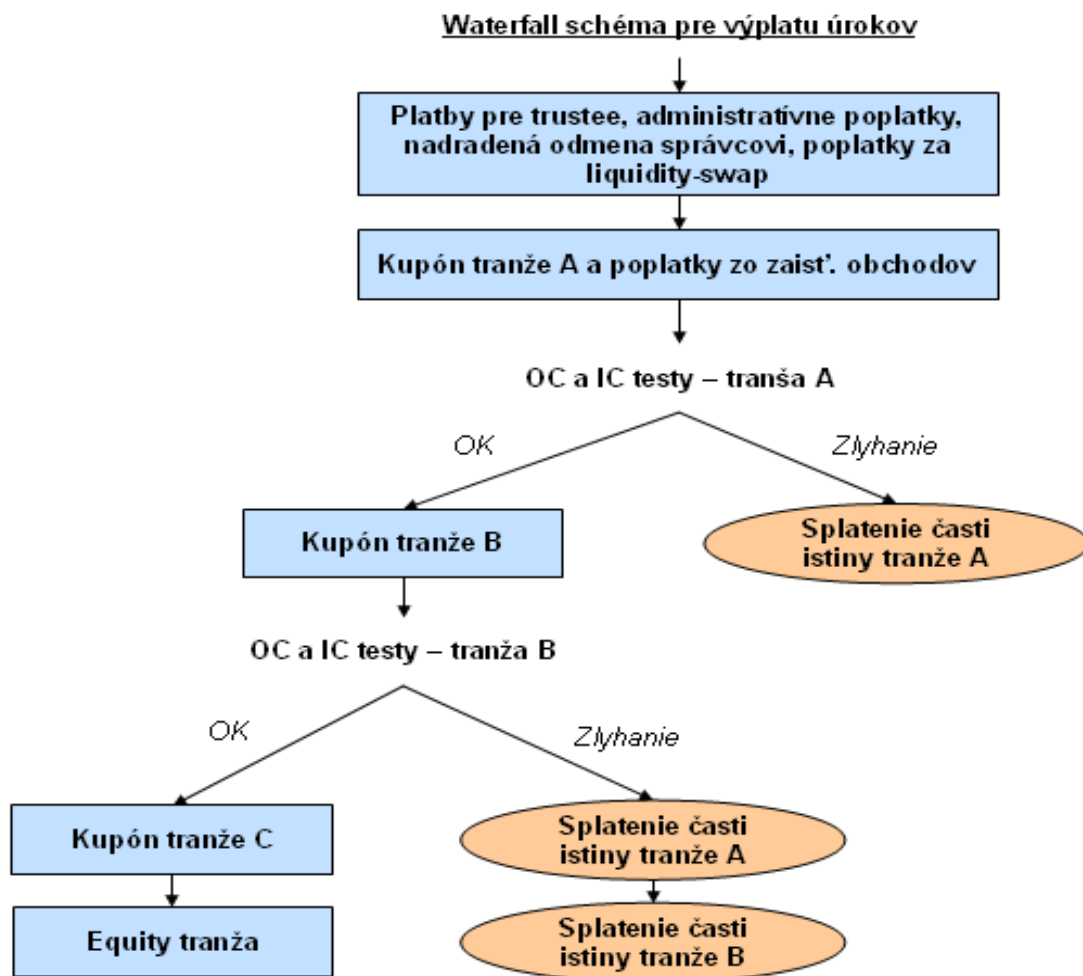
- 260 miliónov dolárov (87% transakcie) má rating Aaa/AAA (Moody's/S&P) s pohyblivou sadzbou
- 27 miliónov dolárov (17 miliónov s pevnou a 10 miliónov s pohyblivou sadzbou) triedy B má rating A3 od Moody's

- 5 miliónov dolárov (s pevnou sadzbou) triedy C má rating Ba2 od Moody's
- 8 miliónov dolárov vo vlastnom kapitále (tzv. „preferované podiely“)

Podkladové portfólio tejto transakcie sa skladá primárne z komerčných MBS, ABS, nehnuteľnostných investičných fondov a rezidenčných MBS, kde minimálne 90% musí mať rating Baa3 od Moody's alebo BBB od S&P. Správca aktív je rešpektovaná firma spravujúce financie.

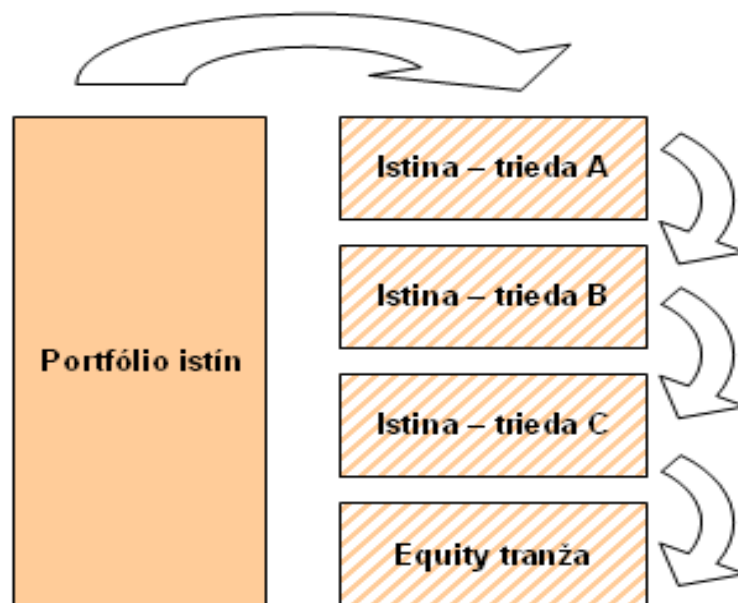
Obrázok 2.1 popisuje prioritizáciu distribúcie úrokov pre rôzne triedy z našej transakcie. Platby z úrokov sú najprv rozdelené do nákladov vysokej priority (ako napríklad poplatky, dane,...). Po tomto kroku nasleduje výplata investorov, ako prvá nasleduje výplata najseniornejších tranží až postupne k juniorným. Veľmi dôležitú úlohu pri finančnom vodopáde hrajú testy pokrytia, ktoré sme popísali v kapitolách 2.1. a 2.2. Tieto sú veľmi dôležité, nakoľko predtým, než sa vyplatia akékoľvek platby triedam B a C, musia sa urobiť testy pokrytia aby sa zaistilo, že transakcia sa „chová“ v rámci pravidiel. Pokiaľ sa tieto testy zanedbajú, postihy voči držiteľom kapitálu sú veľmi prísne.

Ako je vidieť aj z obrázku, pokiaľ trieda A neprejde testom pokrytia, tak zvyšok z úrokov sa použije na úhradu istiny triedy A a peňažný tok tried B a C bude taktiež presmerovaný. Pokiaľ test zlyhá pri triede B, tak úrok bude prevedený z triedy C na zaplatenie istiny triedy A alebo ak je trieda A uspokojená, tak istiny triedy B.



Obrázok 2.1: Proces platby úrokov jednotlivým triedam

Nasledujúci obrázok ukazuje jednoduchý peňažný tok istiny pre tento príklad. Istina je vyplácaná čisto smerom dolu podľa poradia tried. V prípade zostatku sa čiastka prevedie buď na spread account alebo sa prevedie priamo pôvodcovi pohľadáviek ako tzv. odložená časť kúpnej ceny (ozn. equity).



Obrázok 2.2 : Proces platby istín jednotlivým triedam

2.5 Výstupy z kvantitatívnych analýz - úvod do teórie

Priemerná súčasná hodnota tranží

Definícia 2.4: *Priemernú súčasnú hodnotu definujeme ako*

$$APV = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n PV_i, \quad (2.35)$$

kde i je číslo simulácie a n je počet simulácií.

APV sa stanovuje ako priemer všetkých finančných tokov tranže z jednotlivých Monte Carlo simulácií. Je vypočítaná diskontovaním všetkých finančných tokov, ktoré danej tranži pritečú.

Smerodajná odchýlka súčasnej hodnoty

Definícia 2.5: *Smerodajnú odchýlku súčasnej hodnoty definujeme ako*

$$std(PV) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (PV_i - APV)^2}. \quad (2.36)$$

Táto veličina (STD – *standard deviation*) ukazuje rozptýlenie súčasnej hodnoty tranže od priemernej súčasnej hodnoty tranže.

Predstavme si napríklad, že máme priemer 102 a odchýlku 2,16. Aj keď hodnota 102 nám ukazuje, že v priemere zarábame, tak stále máme veľa súčasných hodnôt pod 100. Súčasných hodnôt pod 100 pre nás predstavujú stratu.

Hodnota v riziku

Definícia 2.6: Výberová hodnota v riziku je definovaná vzťahom

$$VaR_q = PV_q - APV.$$

K výpočtu odhadu hodnoty v riziku (VaR – *Value at Risk*) sa využívajú kvantily strát. Kvantil $PV_{95} = 97,68$ nám hovorí, že 5% z našich 10.000 simulácií spadne pod hodnotu 97,68.

V našom príklade nám teda VaR vyjde -4,31. Záporná hodnota VaR_{95} (platí takmer vo všetkých prípadoch) znamená, že priemer súčasných hodnôt tranží je väčší ako 5% najhorších súčasných hodnôt. Čím vyššia je absolútna hodnota VaR , tým je tranža rizikovejšia. Vo väčšine prípadov platí, že čím je tranža podriadenejšia, tým menšia je hodnota VaR .

Očakávaná extrémna strata

Definícia 2.7: Očakávaná extrémna strata (*Expected shortfall*) je definovaná ako vzdialenosť priemeru $q\%$ najhorších súčasných hodnôt od priemeru súčasných hodnôt pre danú tranžu, tj.:

$$SF_q = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n PV_i \cdot I_{PV_q} - APV, \quad (2.37)$$

kde $I_{PV_q} = 1$ pre $PV_i \leq PV_q$ (inak 0) a k predstavuje počet súčasných hodnôt tranží, ktoré sú menšie alebo rovné k -percentnému kvantilu súčasných hodnôt tranží.

Očakávaná extrémna strata je taktiež založená na kvantiloch, ktoré nám oddeľujú 5% najhorších súčasných hodnôt od ostatných 95%. Čím je očakávaná najhoršia strata vyššia, tým vyššia bude strata, pokiaľ sa prípad, ktorý spadá do 5% najhorších, objaví. Pre najhoršiu tranžu je to väčšinou -100%. Ak označíme L ako stratu, potom (2.37) môžeme tiež prepísať do tvaru:

$$SF_q = E(L|L > Var_q). \quad (2.38)$$

Očakávaná strata

Definícia 2.8: *Očakávaná strata sa definuje ako priemer strát cez všetky simulácie, tj.:*

$$Exp.loss = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n loss_i. \quad (2.39)$$

Stratu tranže pre jednotlivé simulácie spočítame porovnaním diskontovaných tokov smerujúcich danej tranži s nominálom tranže $loss_i = \max(0, Size - PV_i)$, kde veličinou $Size$ rozumieme veľkosť príslušnej tranže. Táto veličina nám vyjadruje stratu jednej simulácie.

Ak je veľkosť tranže vyššia než súčasná hodnota tranže pre simuláciu i (hodnota $loss_i$ je negatívna), potom ku strate nedošlo a tá sa teda rovná nule. V opačnom prípade rozdiel týchto veličín predstavuje stratu.

Pomer výnosu a rizika

Definícia 2.9: *Pomer, ktorý dáva do súvzťažnosti výnos a riziko, definujeme ako:*

$$Sharpe = \frac{APV}{STD \cdot \sqrt{Duration}}. \quad (2.40)$$

Tento pomer je teda priamym vyjadrením odmeny za riziko.

Durácia

Definícia 2.10: *Durácia pre j -tu simuláciu je definovaná ako*

$$D_j = \frac{\sum_{t=1}^k t \cdot \frac{CF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^k \frac{CF_t}{(1+i)^t}}. \quad (2.41)$$

Durácia vyjadruje vážený priemer obdobia t , v ktorom sú peňažné toky platené, teda načasovanie peňažných tokov z portfólia aktív. Váhami sú súčasné hodnoty peňažných tokov z podkladového portfólia.

Priemerná durácia tranže sa spočíta ako priemer durácií pre jednotlivé simulácie cez všetky simulácie, tj.:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}. \quad (2.42)$$

Default adjusted spread

Táto veličina je výsledkom iretačnej procedúry. Vyjadruje veľkosť spreadu (v bp, anualizovaný), ktorý tranža priemerne dostane. DAS bude vždy menší alebo rovný váženému priemernému spreadu portfólia

$$\frac{PV_i}{(1 + DAS_i)^t} = Size, \quad (2.43)$$

potom

$$DAS = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n DAS_j. \quad (2.44)$$

Hodnotu DAS môžeme tiež približne odhadnúť zo vzťahu

$$Size \cdot (1 + DAS)^{Durace} \approx APV, \quad (2.45)$$

kde $Size$ je nominálna hodnota príslušnej tranže.

Garantovaný spread môžeme dosiahnuť len v prípade, že sa neobjaví žiadne zlyhanie. Zlyhanie nám znižuje zarobený spread.

Implikovaný rating

Pokiaľ poznáme duráciu a očakávanú stratu tranže, môžeme určiť implikovaný rating. Ten je odvodený priradením týchto dvoch veličín tabuľke Moody's očakávaných strát.

Durácia	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
Aaa	0,0000	0,0001	0,0004	0,0010	0,0016	0,0022	0,0029	0,0036	0,0045	0,0055
Aa1	0,0003	0,0017	0,0055	0,0116	0,0171	0,0231	0,0297	0,0369	0,0451	0,0550
Aa2	0,0007	0,0044	0,0143	0,0259	0,0374	0,0490	0,0611	0,0743	0,0902	0,1100
Aa3	0,0017	0,0105	0,0325	0,0556	0,0781	0,1007	0,1249	0,1496	0,1799	0,2200
A1	0,0032	0,0204	0,0644	0,1040	0,1436	0,1815	0,2233	0,2640	0,3152	0,3850
A2	0,0060	0,0385	0,1221	0,1898	0,2569	0,3207	0,3905	0,4560	0,5401	0,6600
A3	0,0214	0,0825	0,1980	0,2970	0,4015	0,5005	0,6105	0,7150	0,8360	0,9900
Baa1	0,0495	0,1540	0,3080	0,4565	0,6050	0,7535	0,9185	1,0835	1,2485	1,4300
Baa2	0,0935	0,2585	0,4565	0,6600	0,8690	1,0835	1,3255	1,5675	1,7820	1,9800
Baa3	0,2310	0,5775	0,9405	1,3090	1,6775	2,0350	2,3815	2,7335	3,0635	3,3550
Ba1	0,4785	1,1110	1,7215	2,3100	2,9040	3,4375	3,8830	4,3395	4,7795	5,1700
Ba2	0,8580	1,9085	2,8490	3,7400	4,6255	5,3735	5,8850	6,4130	6,9575	7,4250
Ba3	1,5455	3,0305	4,3285	5,3845	6,5230	7,4195	8,0410	8,6405	9,1905	9,7130
B1	2,5740	4,6090	6,3690	7,6175	8,8660	9,8395	10,5215	11,1265	11,6820	12,2100
B2	3,9380	6,4185	8,5525	9,9715	11,3905	12,4575	13,2055	13,8325	14,4210	14,9600
B3	6,3919	9,1355	11,5665	13,2220	14,8775	16,0600	17,0500	17,9190	18,5790	19,1950
Caa1	9,5599	12,7788	15,7512	17,8634	19,9726	21,4317	22,7620	24,0113	25,1195	26,2350
Caa2	14,3000	17,8750	21,4500	24,1340	26,8125	28,6000	30,3875	32,1750	33,9625	35,7500
Caa3	28,0446	31,3548	34,3475	36,4331	38,4017	39,6611	40,8817	42,0669	43,2196	44,3850

Tabuľka 2.3 : Moody's tabuľka očakávaných strát

Ak máme napríklad duráciu rovnú 5,23 roku a očakávaná strata je rovná 6,5%, potom vyhľadáme v stĺpci s duráciou 6 (stĺpec, ktorý zodpovedá celej vyššej hodnote durácie z dôvodu konzervatívnejšieho prístupu) pravdepodobnosť, ktorá je vyššia než námi spočítaná očakávaná strata. V našom prípade teda vyhľadáme pravdepodobnosť 7,4195%. Táto pravdepodobnosť zodpovedá ratingu Ba3. Týmto spôsobom sme teda priradili tranži implikovaný rating.

Kapitola 3

Prezentácia numerických výpočtov

V nasledujúcej kapitole sa zameriame na numerické výpočty základných hodnôt na fiktívnom portfóliu. Popíšeme si podrobne techniky, ktoré boli potrebné pri simuláciách a taktiež budeme prezentovať výstupy zo simulácií, ku ktorým bol použitý program *R*.

3.1 Popis použitých hodnôt pri simuláciách

Než začneme s kvantitatívnou analýzou fiktívneho portfólia, musíme si najprv zadať základné hodnoty, ktoré budú využité. Vzhľadom k tomu, že cieľom práce je taktiež stresové testovanie (viz kapitola 4), pomocou fiktívneho portfólia namodelujeme situáciu v roku 2007, keď mali cenné papiere AAA tranží jedny z najvyšších hodnôt a následne budeme stresovať hodnoty tak, aby sme odzrkadlili reálnu hodnotu, ktorú mali tieto papiere v polovici roku 2009, keď klesli na najnižšiu hodnotu.

K analýze budeme využívať sadzby Európskeho trhu, ktoré boli v marci 2007 nasledovné:

Lehota splatnosti	EURIBOR 6M	Lehota splatnosti	EURIBOR 6M
6M	4,033%	66M	4,166%
1Y	4,108%	6Y	4,174%
18M	4,152%	78M	4,180%
2Y	4,175%	7Y	4,187%
30M	4,173%	90M	4,199%
3Y	4,162%	8Y	4,212%
42M	4,157%	102M	4,225%
4Y	4,156%	9Y	4,237%
54M	4,157%	114M	4,250%
5Y	4,160%	10Y	4,263%

Tabuľka 3.1: Sadzby Európskeho trhu

3.1.1 Korelácie medzi zlyhaniami emitentov

Korelácia medzi zlyhaniami závisí na diverzifikácii portfólia; určíme si teda hodnoty korelácie medzi jednotlivými sektormi. Emitenti z rovnakého portfólia budú mať koreláciu 30%, zatiaľ čo korelácia medzi emitentami z rôznych portfólií bude 12%. S týmito koreláciami sa často pracovalo a preto budeme v expertnom odhade pracovať s týmito hodnotami. Ďalej predpokladáme, že matica korelácií je symetrická, pozitívne definitná, s jedničkami na diagonále.

3.1.2 Kopule - generovanie dôb do zlyhania

Pri generovaní dôb do zlyhania budeme postupovať podľa návodu popísaného v sekcii 2.3.5 na strane 38, v našom prípade $n = 50$. Budeme teda generovať hodnoty Y_1, \dots, Y_{50} z 50-rozmerného normálneho rozdelenia a doby do zlyhania T_1, \dots, T_{50} pomocou vzťahu $T_i = F_i^{-1}(\Phi(Y_i))$, $i = 1, \dots, 50$.

3.1.3 Miera návratnosti

Pre generovanie mier návratnosti sa budeme riadiť rozdelením $B(1; \frac{2}{3})$. Teda stredná hodnota je 60% a smerodajná odchýlka 30%.

3.1.4 Veľkosť tranží, spread a spúšťacie hodnoty

Pri popise IC a OC testov v kapitole 2 sme pri určovaní koeficientu j-tej tranže použili výraz trigger hodnota. Jedná sa o medznú hodnotu, ktorá znamená spustenie rozpredávania portfólia do tej doby, než CDO touto medznou hodnotou prejde. Pre simuláciu finančného vodopádu budeme tieto hodnoty potrebovať, tak isto ako spread a rozdelenie veľkosti portfólia. Všetky tieto hodnoty prispôbíme faktu, že fiktívna CDO sa bude skladať z piatich tranží a equity. Hodnoty sme si určili nasledovne:

Tranža	Size (EUR)	Spread (bp)	OC trigger	IC trigger
A	65 000 000	24	120,0%	110,0%
B	8 500 000	38	120,0%	110,0%
C	8 000 000	60	111,6%	105,0%
D	4 500 000	145	107,8%	101,1%
E	3 500 000	325	104,5%	0,0%
Equity	10 500 000	0	0,0%	0,0%

Tabuľka 3.2: Veľkosť tranží, spread a spúšťacie hodnoty

3.1.5 Finančný vodopád - Monte Carlo simulácie

Po určení všetkých hodnôt, ktoré sú dôležité pre určenie finančného vodopádu, sa dostávame k praktickej časti jeho určenia. Určíme si cash flow, ktoré plynú z CDO transakcie, z ktorého následne dôjde k čerpaniu prostriedkov na splácanie záväzkov tranžiam:

1. Úrokové príjmy = *aktuálna nominálna hodnota aktíva* * (*spread tranže + budúca spotová sadzba na dané obdobie*), kde súčet v zátvorke je kupónová sadzba
2. Príjmy z istiny sú rovné
 - *nominálnej veľkosti portfólia* (v prípade maturity)
 - *nominálnej veľkosti portfólia* * *recovery rate* (v prípade zlyhania)
 - *nula* v ostatných prípadoch

V ďalšom kroku overíme výsledky OC a IC testov. Budeme používať nasledujúce značenie

- „OC“ pre výsledok OC testu
- „IC“ pre výsledok IC testu
- „NV“ pre aktuálnu nominálnu veľkosť portfólia
- „VT“ pre aktuálnu nominálnu veľkosť príslušnej tranže
- „I“ pre úrokový príjem
- „ac“ pre priemerný kupón príslušnej tranže
- „TV“ pre spúšťaciu hodnotu

Aby bol OC test splnený, musí platiť

$$OC_n = \frac{NV}{\sum_{i=1}^n VT_i} \geq TV_n, \quad (3.1)$$

kde n je počet tranží.

V prípade nesplnenia testu

$$OC_n = \frac{NV}{\sum_{i=1}^n VT_i} < TV_n, \quad (3.2)$$

potrebujeme zistiť, o koľko musí byť znížený nominál tranží, aby CDO testom prešlo. Potrebujeme teda nájsť x (potrebné zníženie nominálu tranží) z rovnice

$$TV_n = \frac{NV}{\sum_{i=1}^n VT_i - x}, \quad (3.3)$$

kde po úprave dostaneme

$$x = \sum_{i=1}^n VT_i - \frac{NV}{TV_n}. \quad (3.4)$$

Podobne postupujeme v prípade IC testu, kde v prípade nesplnenia testu hľadáme hodnotu y (opäť potrebné zníženie nominálu tranží)

$$TV_n = \frac{I}{ac \cdot (\sum_{i=1}^n VT_i - y)}, \quad (3.5)$$

teda

$$y = \sum_{i=1}^n VT_i - \frac{I}{ac \cdot TV_n}. \quad (3.6)$$

Pokiaľ dôjde k porušeniu obidvoch testov, použijeme vyššiu z hodnôt x a y , ktorá nám zaručí následné splnenie oboch testov.

V prípade voľného kapitálu sa reinvestujú prostriedky podobných cenných papierov ako sú tie, u ktorých nenastalo do tej doby zlyhanie. V prípade nášho fiktívneho portfólia budeme reinvestovať do rovnakých cenných papierov a reinvestícia prebehne len v prvých piatich rokoch priebehu CDO. Reinvestície budú rovnomerne rozložené pre každý cenný papier.

Na konci všetkých výpočtov a testov budeme simulovať výplatné termíny, v ktorých simulujeme splatenie dlhopisu, zlyhanie emitenta a reinvestíciu. Po simulácii dostaneme aktuálnu hodnotu podkladových aktív a ďalšie charakteristiky, ktoré si popíšeme v nasledujúcej podkapitole.

3.2 Výstupy z analýzy fiktívneho portfólia

V tejto podkapitole budeme prezentovať výsledky kvantitatívnej analýzy na fiktívnom portfóliu. S hodnotami, ktoré sme si zadefinovali v predchádzajúcej podkapitole, vykonáme 5000 Monte Carlo simulácií na fiktívnom portfóliu zadefinovanom v sekcii 1.5. na strane 22. Pre zopakovanie, jedná sa o portfólio s nasledujúcimi vlastnosťami:

- 50 cenných papierov

- Priemerná doba splatnosti 8 rokov
- Celková nominálna hodnota portfólia 100 miliónov eur
- WARF 1900
- WAS 250 bp
- Index rozmanitosti 30.

Na tomto portfóliu si určíme cash flow a výsledky z 5000 simulácií spriemerujeme. Pre porovnanie budeme uvádzať vždy priemery s OC a IC testami a bez nich.

3.2.1 APV, STD

Základné parametre ako APV (priemerná súčasná hodnota tranže), APV.pc (priemerná súčasná hodnota tranže v pomere k veľkosti príslušnej tranže) a STD (rozpätie súčasných hodnôt od priemernej ceny tranže) vyšli nasledovne:

Tranža	Objem	Bez OC a IC testov			S OC a IC testami		
		APV	APV.pc	STD	APV	APV.pc	STD
A	65.000.000	66.007.955	101,55%	0,75%	65.994.500	101,53%	0,10%
B	8.500.000	8.638.185	101,63%	8,14%	8.744.758	102,88%	0,99%
C	8.000.000	7.941.330	99,27%	15,97%	8.363.400	104,54%	1,77%
D	4.500.000	4.423.241	98,29%	22,67%	4.988.021	110,84%	5,52%
E	3.500.000	3.655.148	104,43%	24,83%	4.318.279	123,38%	10,95%
Equity	10.500.000	13.874.690	132,14%	32,16%	13.968.560	133,03%	38,41%

Tabuľka 3.3: Monte Carlo simulácie - APV, APV.pc, STD

Pokiaľ by sme teda chceli zistiť, koľko v priemere zarobí tranža A, urobíme si rozdiel tretieho a druhého stĺpca (bez testov) alebo šiesteho a druhého stĺpca (s testami). Percentuálnu výnosnosť vidíme hneď v stĺpcoch APV.pc po odčítaní 100 od danej hodnoty (tj. napríklad výnosnosť tranže A je bez testov 1,55% a s testami 1,53%).

3.2.2 Percentilové charakteristiky

Než sa dostaneme k výpočtu hodnoty v riziku, ktorá bude pre stresové testovanie najpodstatnejšia, musíme ešte vypočítať kvantily strát, ktoré sa používajú k jej výpočtu.

	Bez OC a IC testov			S OC a IC testami		
Tranža	PV _{pc90}	PV _{pc95}	PV _{pc99}	PV _{pc90}	PV _{pc95}	PV _{pc99}
A	100,01%	100,01%	99,97	99,89%	99,79%	99,60%
B	101,21%	101,20%	45,86%	99,99%	99,99%	99,96%
C	85,37%	53,69%	37,78%	100,01%	100,01%	100,01%
D	45,16%	45,06%	43,03%	100,11%	100,11	83,75%
E	55,87%	55,67%	53,30%	101,15%	95,98%	17,03%
Equity	61,98%	50,90%	31,03%	45,68%	27,78%	6,70%

Tabuľka 3.4: Percentilové charakteristiky

Význam týchto kvantilov môžeme matematicky vyjadriť na príklade tranže A ako (*pc* značí priemernú cenu tranže)

$$PV_{pc90} = P(PV > 99,89\%APV) = 90\%, \quad (3.7)$$

$$PV_{pc95} = P(PV > 99,79\%APV) = 95\% \quad (3.8)$$

a

$$PV_{pc99} = P(PV > 99,60\%APV) = 99\%. \quad (3.9)$$

3.2.3 VaR, Extrémna strata

Dostávame sa k výpočtu hodnoty v riziku a očakávanej extrémnej straty, ktoré nám poslúžia k lepšiemu vyhodnoteniu rizikovosti súčasných hodnôt tranží. V nasledujúcej tabuľke vidíme výsledky z Monte Carlo simulácií:

	Bez OC a IC testov					
Tranža	VaR ₉₀	VaR ₉₅	VaR ₉₉	SF ₉₀	SF ₉₅	SF ₉₉
A	0,01%	0,00%	-0,03%	-0,44%	-0,88%	-4,31%
B	1,21%	1,20%	-54,14%	-11,11%	-23,39%	-63,19%
C	-14,63%	-46,31%	-62,22%	-44,60%	-59,95%	-63,28%
D	-54,84%	-54,94%	-56,97%	-55,40%	-55,74%	-57,83%
E	-44,13%	-44,33%	-46,70%	-45,13%	-46,51%	-48,99%
Equity	-38,02%	-49,10%	-68,97%	-51,99%	-60,85%	-77,98%

Tabuľka 3.5: Hodnota v riziku a očakávaná extrémna strata - bez testov

	S OC a IC testami					
Tranža	VaR ₉₀	VaR ₉₅	VaR ₉₉	SF ₉₀	SF ₉₅	SF ₉₉
A	-0,11%	-0,21%	-0,40%	-0,24%	-0,32%	-0,49%
B	-0,01%	-0,01%	-0,04%	-0,17%	-0,24%	-1,83%
C	0,01%	0,01%	0,01%	-0,26%	-0,26%	-2,16%
D	0,11%	0,11%	-16,25%	-4,03%	-4,03%	-54,06%
E	1,15%	-4,02%	-82,97%	-23,32%	-47,10%	-90,97%
Equity	-54,32%	-72,22%	-93,30%	-74,08%	-85,79%	-97,92%

Tabuľka 3.6: Hodnota v riziku a očakávaná extrémna strata - s testami

Hodnotu VaR spočítame pomocou vzťahu

$$VaR.q = PV.q - APV, \quad (3.10)$$

kde sú už všetky hodnoty známe. V našom prípade máme napríklad po zavedení testov VaR₉₅ pre tranžu A -0,21%. Záporná hodnota VaR₉₅ (obecne platí takmer vo všetkých prípadoch) znamená, že priemer súčasných hodnôt tranží je väčší ako 5% najhorších súčasných hodnôt. Čím vyššia je absolútna hodnota VaR, tým je tranža rizikovejšia. Vo väčšine prípadov platí, že čím je tranža podriadenejšia, tým menšia je hodnota VaR. Za zmienku stojí takisto fakt, že v prípade použitia testov je VaR₉₉ 93,30%, teda opäť testy vyhodnocujú equity tranžu ako absolútne najrizikovejšiu.

Pri bližšom pohľade na tabuľku zistíme, že v prípade zavedenia testov je VaR výrazne nižší, než bez testov. Dôvod je, že v prípade zavedenia testov, ako sme popísali v kapitole 2, dochádza k predčasnému splateniu tranže triedy A v prípade porušenia testu. Diskontované toky sú teda vyššie v prípade, keď tranža triedy A bola splatená neskôr, teda bez testov pokrytia. Testy pokrytia plnia svoju funkciu a chránia vyššie tranže aj v prípade zlyhania a to predovšetkým na úkor tranže equity, ktorá pokrýva straty ako prvá a ktorá je v prípade použitia testov viac riziková. Z tabuľky je vidieť, že jej hodnota v riziku bola testami ovplyvnená najviac.

V prípade reálneho portfólia sú tieto testy sledované ratingovými agentúrami a pokiaľ správca nie je schopný zaistiť splnenie týchto testov, znižujú agentúry rating emisie.

Očakávaná extrémna strata (*Expected Shortfall*) je taktiež založená na kvantilochoch, ktoré nám oddeľujú 5% najhorších súčasných hodnôt od ostatných 95% (respektíve 1% najhorších od 99% ostatných). Očakávaná extrémna strata sa nakoniec vypočíta ako vzdialenosť priemeru $q\%$ najhorších súčasných hodnôt od priemeru súčasných hodnôt pre danú tranžu. Pokiaľ porovnáme výsledky našich simulácií napríklad pre tranžu B a C, vidíme, že pri použití testov je očakávaná extrémna strata výrazne nižšia a teda testy pokrytia majú výrazný vplyv na prerozdelenie finančných prostriedkov.

3.2.4 Očakávaná strata, pomer výnosu a rizika, durácia a implikovaný rating

Ďalšie hodnoty dôležité pri hodnotení rizika jednotlivých tranží si môžeme prehliaďnúť v nasledujúcej tabuľke (pomer výnosu a rizika ozn. PVR):

	Bez OC a IC testov					S OC a IC testami				
Tranža	Exp.loss	Exp.loss.pc	PVR	Durácia	Impl.rat	Exp.loss	Exp.loss.pc	PVR	Durácia	Impl.rat
A	21.934	0,03%	0,782	6,732	Aa2	0	0,00%	6,202	6,465	Aaa
B	103.534	1,15%	0,076	7,522	Baa2	1.559	0,02%	1,088	7,507	Aaa
C	377.820	4,72%	-0,017	7,489	Ba2	4.756	0,06%	0,898	7,500	Aa2
D	415.062	10,38%	-0,025	7,197	B1	20.158	0,50%	0,572	7,581	A3
E	371.423	12,38%	0,057	6,686	B2	55.745	1,86%	0,545	7,416	Baa3
Equity	517.231	4,70%	0,387	4,191	Ba3	998.609	9,08%	0,310	4,780	B2

Tabuľka 3.7: Očakávaná strata, PVR, durácia a implikovaný rating

Očakávaná strata (*Expected loss*) je priemer strát tranže cez všetky simulácie. Čím vyššia tranža, tým nižšia strata, opäť na úkor najnižších tranží, predovšetkým tranže equity. Keď sa pozrieme na stĺpec očakávanej straty, je vidieť jasný rozdiel pre tranže A-E, kde sa očakávaná strata výrazne znížila (pre tranžu triedy A dokonca na nulu) a pre tranžu equity, kde je naopak po zavedení testov očakávaná strata takmer dvojnásobná. To potvrdzuje naše tvrdenie, že tranža equity chráni vyššie aj v prípade zlyhania, pretože pokrýva straty ako prvá.

Pomer výnosu a rizika je priamym vyjadrením odmeny za riziko. Odmena za riziko je vyššia v prípade zavedenia testov. To ale neplatí pre tranžu equity, kde odmena za riziko klesla so zavedením testov.

Priemerná durácia tranže sa spočítala ako priemer durácií cez všetky simulácie.

V poslednom stĺpci máme nakoniec hodnotu upraveného ratingu, ktorý sme získali pomocou durácie a očakávanej straty a tie následne prideliť v tabuľke kumulovaných pravdepodobností zlyhania od Moody's. Zavedenie testov logicky zlepšuje rating všetkých tranží okrem tranže Equity.

3.2.5 DAS

DAS je výsledkom iretačnej procedúry. Vyjadruje veľkosť spreadu (v bp, anualizovaný), ktorý tranža priemerne dostane. DAS bude vždy menší alebo rovný sľúbenému spreadu tranží. Garantovaný spread môžeme dosiahnuť pre nižšie tranže len v prípade, že sa neobjaví žiadne zlyhanie. Zlyhanie nám znižuje zarobený spread.

		Bez testov	S testami
Tranža	Spread (bp)	DAS (bp)	DAS (bp)
A	24	22,88	23,51
B	38	21,46	37,89
C	60	-9,82	59,41
D	145	-23,88	136,75
E	325	65,08	287,36
Equity	0	687,61	615,38

Tabuľka 3.8: Default adjusted spread

DAS nám teda vyjadruje skutočnú výnosnosť, napríklad u tranže equity môžeme pozorovať pri zavedení testov výnosnosť 6,15%, teda pokles hodnoty oproti 6,88% bez zavedených testov, čo nám ukazuje, že pokiaľ sú testy zavedené, sú vyššie tranže chránené na úkor výnosu tranže equity.

Kapitola 4

Stresové testovanie

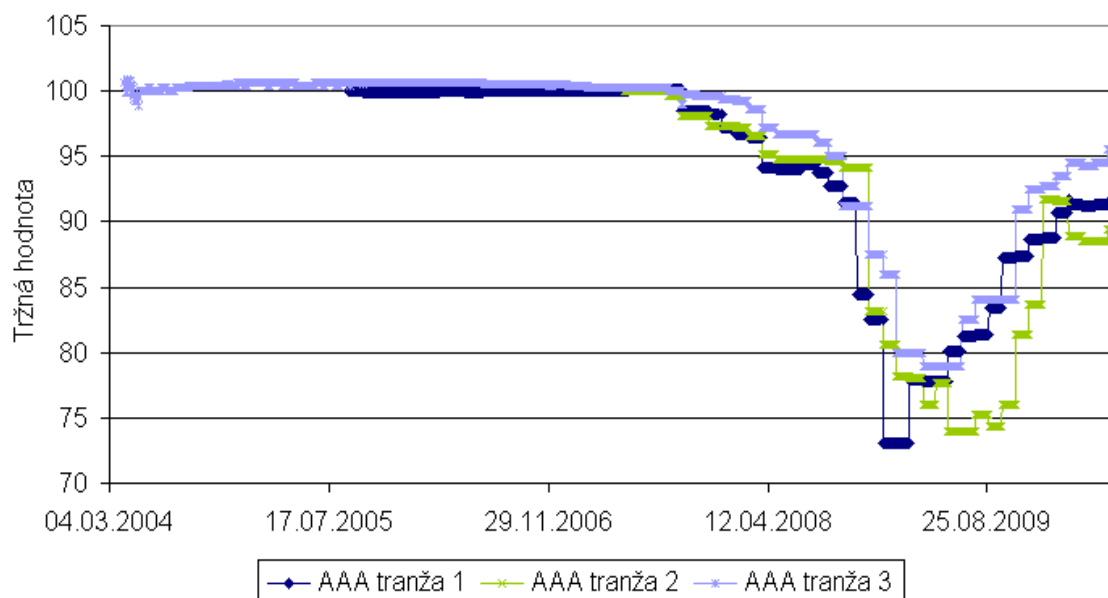
Súčasná finančná kríza nás privádza na otázky, či riadenie rizika v oblasti sekuritizovaných produktov bolo dostatočné. Analýzy ohľadne zodpovednosti riadenia rizika za tento stav dospievajú k názoru, že jedným z dôležitých faktorov, ktoré boli podcenené, bolo stresové testovanie sekuritizovaných produktov. Bolo teda príčinou súčasnej situácie skutočne podcenenie rizika? Čiastočne áno, každopádne je nutné sa pozrieť aj na druhú stranu mince - explozívny nárast stresovo citlivých finančných produktov, ktoré ale nebolo nasledované riadnymi stresovými procedúrami. Štrukturované produkty sú veľmi citlivé na systémové riziko a stresovanie určitých faktorov má na nich významný vplyv.

BCGFS (Bank for International Settlement Committee on the Global Financial System) definuje stresové testovanie ako „rôzne techniky používané finančnými inštitúciami na meranie náchylnosti na výnimočné, extrémne alebo jednoducho neočakávané, ale možné udalosti“. Stresové testovanie je len teoretickým nástrojom pre vysvetlenie poklesu cien, každopádne pokles cien nenastal len kvôli zvýšeniu pravdepodobností zlyhania ale aj kvôli nízkej likvidite tranží a zlému sentimentu trhu. To je samozrejme veľmi ťažko merateľné, a preto sa v tejto práci zameriame na kvantitatívne veličiny. Pre stresové testovanie v reálnej situácii sa dajú stresovať rôzne veličiny - pravdepodobnosť zlyhania, čas návratnosti, miera návratnosti, či korelácie. Pre naše účely majú však významný dopad pravdepodobnosť zlyhania a miera návratnosti a preto v ďalšom budeme pokračovať len analýzou dopadu stresu týchto dvoch veličín.

4.1 Analýza reálnych dát tranží triedy A

Aby sme pochopili, kam až extrémna či neočakávaná udalosť môže zájsť, musíme sa pozrieť na reálne dáta z trhu. Tieto dáta následne použijeme pre spätné stresové testovanie našich fiktívnych dát. Z dôvodu zachovania obchodného tajom-

stva nebudú tieto cenné papiere menované, takisto ako aj ich zdroj. Jedná sa o 3 tranže s ratingom AAA s priebehom od roku 2004 až do konca roku 2009 (história niektorých papierov začína až v prvej polovici roku 2007):



Graf 4.1: Priebeh AAA tranží

Z grafu vidíme, že až do polovice roku 2007 mali tranže stabilnú hodnotu okolo 100. V dobe, keď praskla v USA hypotekárna bublina, začali ceny tranží pomaly klesať, až v prvej polovici roku 2009 dosiahli extrémneho minima. V nasledujúcej tabuľke si môžeme prehliadnuť, koľko tieto tranže stratili (porovnávame hodnoty z prvej polovice roku 2007 s najnižšou hodnotou, ktorú daná tranža dosiahla v roku 2009):

Tranža	Cena v roku 2007	Min v roku 2009	Strata
AAA tranža 1	100,087	73,048	-27,02%
AAA tranža 2	100,000	73,910	-26,09%
AAA tranža 3	100,000	73,048	-27,13%

Tabuľka 4.1: Strata na cene tranží s ratingom AAA

4.2 Stresové testovanie pravdepodobnosti zlyhania

Pokiaľ teda pomenujeme udalosti okolo roku 2009 za extrémne a pokúsime sa ich stresovať, je nutné si tiež uviesť, prečo sa ceny CDO v kríze tak menili.

Najvyššie tranže výrazne klesli aj napriek tomu, že niesli malý spread a mali rating AAA, preto sa na nich v našej analýze zameriame. Hlavný dôvod, prečo klesli, je, že reálne pravdepodobnosti zlyhania boli omnoho vyššie, než tie, ktoré boli zverejňované ratingovými agentúrami. Taktiež je zrejmé, že určovanie ratingov nebolo nastavené správne, nakoľko AAA dlhopis nemôže klesnúť z hodnoty 100 na hodnotu okolo 70. A ako sme si uviedli už na začiatku tejto práce, investori slepo dôverovali hodnotám, ktoré im ratingové agentúry poskytovali. Investori vinia ratingové agentúry, ratingové agentúry na svoju obranu uvádzajú, že dané hodnoty boli len informatívne a investori sa nemali spoliehať len na nich.

Aj keď väčšinou ratingové agentúry zareagovali na zlyhania tak, že okamžite menili ratingy tranží, po roku 2007 začali zverejňované hodnoty pravdepodobnosti zlyhania pomaly stúpať. V nasledujúcej tabuľke si môžeme prehliadnúť pravdepodobnosti zlyhania zverejnené agentúrou Moody's v roku 2007 a v roku 2009 (v %, zaokrúhlené na 2 desatinné miesta):

Rok	Baa3		Ba1		Ba2		Ba3		B1		B2	
	2007	2009	2007	2009	2007	2009	2007	2009	2007	2009	2007	2009
1	0.42	0.30	0.87	0.74	1.56	0.783	2.81	1.84	4.68	2.56	7.16	3.97
2	1.05	0.85	2.02	2.03	3.47	2.27	5.51	5.26	8.38	7.03	11.67	9.70
3	1.71	1.53	3.13	3.77	5.18	4.20	7.87	9.314	11.58	11.70	15.55	15.36
4	2.38	2.19	4.2	5.61	6.8	6.25	9.79	13.56	13.85	15.81	18.13	20.62
5	3.05	3.08	5.28	7.29	8.41	8.08	11.86	16.95	16.12	20.08	20.71	25.21
6	3.70	3.99	6.25	9.08	9.77	9.54	13.49	20.02	17.89	24.45	22.65	29.37
7	4.33	4.80	7.06	10.52	10.70	10.89	14.62	22.93	19.13	29.15	24.01	33.18
8	4.97	5.77	7.89	11.584	11.66	12.36	15.71	25.94	20.23	33.16	25.15	36.52
9	5.57	6.66	8.69	12.63	12.65	13.75	16.71	28.95	21.24	36.72	26.22	39.86
10	6.10	7.54	9.40	13.79	13.50	15.01	17.66	31.87	22.20	39.93	27.20	42.72
11	7.70	8.23	11.26	14.88	14.83	16.76	19.61	34.19	24.40	42.86	29.18	45.03
12	8.49	8.80	12.30	16.32	16.11	18.69	21.08	36.24	26.05	46.09	31.01	47.01
13	9.27	9.90	13.31	17.32	17.35	20.80	22.47	38.80	27.59	49.48	32.71	49.31
14	10.05	10.98	14.30	18.15	18.56	22.79	23.80	42.46	29.04	52.85	34.28	51.83
15	10.82	11.53	15.27	19.58	19.71	25.37	25.06	45.07	30.34	54.66	35.74	55.58
16	11.58	12.27	16.20	20.67	20.83	27.47	26.25	47.51	31.67	56.17	37.09	58.35
17	12.32	13.35	17.11	21.89	21.89	29.26	27.38	49.48	32.87	58.66	38.35	59.71
18	13.05	14.49	17.99	23.44	22.92	29.93	28.45	51.21	33.99	60.93	39.52	62.69
19	13.77	15.78	18.83	25.91	23.90	30.23	29.47	53.00	35.04	63.51	40.61	63.12
20	14.47	17.13	19.65	27.75	24.84	30.23	30.44	54.66	36.04	66.35	41.631	63.12

Tabuľka 4.2: Pravdepodobnosti zlyhania pre rating Baa3 až B2

Z tabuľky môžeme vidieť, že pre nami zvolené ratingy Baa3 až B2 a maturite 6-10 rokov vo fiktívnom portfóliu sú hodnoty (okrem ratingu Ba2 pri splatnosti 6

rokov) vyššie, čím horší rating, tým väčšia zmena oproti roku 2007 - pri najhoršom ratingu sú dokonca takmer dvojnásobné. Je teda vidieť, že aj ratingové agentúry začali sprísňovať svoje kritéria pre pravdepodobnosti zlyhania.

Vrátime sa k stratám, ktoré dosiahli tranže AAA v reálnych dátach a budeme sa snažiť stresovať pravdepodobnosti zlyhania a mieru návratnosti, aby sme dosiahli hodnôt strát skutočných tranží (keďže VaR je najhoršia možná predpokladaná strata, ku ktorej môže dôjsť s vopred stanovenou pravdepodobnosťou v určenom budúcom období). Hľadáme teda VaR s hodnotami okolo 27%, ktorý by odzkradľoval stratu reálnych dát. Pokúsime sa zistiť, koľkokrát je nutné stresovať pravdepodobnosť zlyhania, aby sme sa priblížili na reálnu stratu. Vzhľadom k tomu, že reálne dáta obsahujú len tranže s ratingom AAA, budeme stresovať len tranžu triedy A (ktorá bola takmer vždy ohodnotená ratingom AAA) z nášho fiktívneho portfólia. Vypracovali sme ďalších 5000 Monte Carlo simulácií pre dvoj- až dvadsaťnásobok pravdepodobnosti zlyhania. Výsledky sú porovnané v nasledujúcom skrátenom prehľade:

Stres faktor zlyhania	VaR_{90}	VaR_{95}	VaR_{99}
Pôvodné zlyhanie	-0,11%	-0,21%	-0,40%
2x	-0,40%	-0,51%	-0,68%
4x	-0,78%	-0,91%	-1,53%
6x	-1,16%	-1,36%	-2,45%
8x	-1,54%	-1,81%	-3,40%
10x	-1,92%	-2,26%	-4,40%
12x	-2,30%	-2,71%	-5,46%
15x	-2,88%	-3,40%	-6,99%
20x	-3,76%	-4,51%	-9,20%

Tabuľka 4.3: Stresové testovanie pravdepodobnosti zlyhania pre tranžu triedy A (s ratingom AAA) z fiktívneho portfólia

Z výsledkov stresového testovania vidíme, že pôvodné ocenenia boli výrazne podhodnotené a scenáre neočakávaných či extrémnych udalostí neboli v žiadnom prípade brané do úvahy. Podľa výsledkov tejto analýzy by pôvodné pravdepodobnosti zlyhania mali byť minimálne 20-násobne vyššie, než hodnoty v roku 2007.

4.3 Stresové testovanie miery návratnosti

Ďalej sa v našej analýze pokúsime zamyslieť nad inými faktormi, na ktoré by mohli mať dopad extrémne udalosti. Vzhľadom k tomu, že 20-násobok pravdepodobnosti zlyhania sa zdá byť príliš vysoký a nedostáva nás na požadovanú stratu, pokúsili sme sa zamyslieť nad ostatnými vstupmi, ktoré by pri stresovaní mali vplyv na zmenu hodnoty v riziku. Takýmto faktorom môže byť napríklad miera

návratnosti. Z tabuľky 2.1 na strane 31 môžeme vidieť, že podľa odhadov zverejnených agentúrou Moody's, bol prepád medzi rokom 2007 a 2008, keď bola táto štúdia zverejnená, skutočne výrazný, dokonca omnoho výraznejší než prepád dôb do defaultu.

V nasledujúcej analýze sa teda pokúsime stresovať strednú hodnotu B -rozdelenia, ktoré sa pre modelovanie mier návratnosti používa. V našom prípade fiktívneho portfólia malo B -rozdelenie parametre $(1,2/3)$, teda stredná hodnota je rovná 60%. V analýze budeme používať stres 10%, 20%, 30%, 40%, 50% a 70%. Väčšiu hodnotu než aktuálnu z dôvodu, aby sme sa pozreli nielen na dopad extrémnych udalostí, ale aj citlivosť na zmeny. Výsledky stresovej analýzy sú nasledujúce:

Stres faktor miery návratnosti	VaR ₉₀	VaR ₉₅	VaR ₉₉
10%	-0,08%	-0,11%	-0,94%
20%	-0,11%	-0,14%	-0,22%
30%	-0,13%	-0,18%	-0,28%
40%	-0,13%	-0,21%	-0,33%
50%	-0,12%	-0,21%	-0,37%
Pôvodná miera návratnosti	-0,11%	-0,20%	-0,40%
70%	-0,08%	-0,16%	-0,37%

Tabuľka 4.4: Stresové testovanie miery návratnosti pre tranžu triedy A (s ratingom AAA) z fiktívneho portfólia

Z tabuľky vidíme, že stresové testovanie miery návratnosti sa pre tranžu triedy A veľmi neodlišuje, pretože vznikajúce straty z nízkej miery návratnosti sú pokrývané nižšími tranžami.

Pre úplnosť sa teda pozrieme aj na výsledky dopadu stresu miery návratnosti na nižšie tranže. V nasledujúcej tabuľke si môžeme prezrieť výsledku stresu strednej hodnoty miery návratnosti na všetky tranže nášho fiktívneho portfólia, kde je vidieť, že nižšie tranže skutočne pokrývajú stratu, napríklad pre stres strednej hodnoty na 10% pre VaR₉₉ nám už takmer všetky nižšie tranže zlyhali. Čím máme nižší stres strednej hodnoty, tým lepšie sú výsledky pre najvyššiu tranžu. Môžeme si tiež všimnúť, že aj pri štandardných pravdepodobnostiach zlyhania sú tranže citlivé pri zmene miery návratnosti. Tranža D sa už pri znížení strednej hodnoty z 50% na 40% zmení pri VaR₉₅ z 0,111% na -46,29%. Ďalším príkladom na vysokú citlivosť na mieru návratnosti sú tranže B a C, ktoré z takmer nulových hodnôt VaR₉₉ pri pôvodnej miere návratnosti klesli na viac než 80%:

Stres faktor	Tranža	VaR ₉₀	VaR ₉₅	VaR ₉₉
10%	A	-0,08%	-0,11%	-0,94%
	B	0,03%	-16,29%	-83,91%
	C	-30,20%	-61,66%	-95,63%
	D	-92,72%	-97,58%	-100,00%
	E	-94,21%	-97,11%	-100,00%
	Equity	-92,14%	-93,68%	-100,00%
20%	A	-0,11%	-0,14%	-0,22%
	B	0,03%	-0,01%	-63,34%
	C	0,01%	-41,43%	-74,69%
	D	-75,56%	-95,14%	-97,58%
	E	-91,36%	-97,11%	-100,00%
	Equity	-86,60%	-92,89%	-100,00%
30%	A	-0,13%	-0,18%	-0,28%
	B	0,03%	-0,01%	-32,01%
	C	0,01%	-5,45%	-61,92%
	D	-28,11%	-85,64%	-97,58%
	E	-85,75%	-94,15%	-99,87%
	Equity	-85,09%	-92,64%	-100,00%
40%	A	-0,13%	-0,21%	-0,33%
	B	0,03%	-0,01%	-0,01%
	C	0,01%	0,01%	-47,78%
	D	0,11%	-46,29%	-95,14%
	E	-64,08%	-88,56%	-97,11%
	Equity	-79,00%	-91,96%	-100,00%
50%	A	-0,12%	-0,21%	-0,37%
	B	-0,01%	-0,01%	-0,01%
	C	0,01%	0,01%	-0,34%
	D	0,11%	0,11%	-83,61%
	E	-16,65%	-63,54%	-94,21%
	Equity	-67,25%	-82,47%	-100,00%
Pôvodná miera návratnosti	A	-0,11%	-0,20%	-0,40%
	B	-0,01%	-0,01%	-0,04%
	C	0,01%	0,01%	0,01%
	D	0,11%	0,11%	-16,25%
	E	1,15%	-4,02%	-82,97%
	Equity	-54,32%	-72,22%	-93,30%

Tabuľka 4.5: Stresové testovanie miery návratnosti pre všetky tranže z fiktívneho portfólia

4.4 Kombinovaný prístup v stresovom testovaní

Ani stres samotnej miery návratnosti nás ale nedostáva k žiadanému výsledku prepadu cien tranží s ratingom AAA. Ďalšou možnosťou je skombinovať stresy pravdepodobností zlyhania a mier návratnosti. Vypracujeme teda analýzu, kde pre jednotlivé násobky pravdepodobností zlyhania budeme používať stres 10%, 20%, 30%, 40%, 50% a 70% pre strednú hodnotu B -rozdelenia pri modelovaní miery návratnosti. Výsledky tejto komplexnej stresovej analýzy sú zachytené v nasledujúcej tabuľke:

	Stres faktor miery návratnosti	VaR ₉₀	VaR ₉₅	VaR ₉₉
2x zlyhanie	10%	-7,52%	-13,81%	-29,83%
	20%	-0,33%	-7,57%	-20,17%
	30%	-0,27%	-0,44%	-11,40%
	40%	-0,31%	-0,38%	-3,25%
	50%	-0,36%	-0,43%	-0,59%
	Pôvodná návratnosť	-0,40%	-0,51%	-0,68%
	70%	-0,39%	-0,51%	-0,74%
3x zlyhanie	10%	-29,65%	-36,39%	-49,28%
	20%	-20,09%	-27,15%	-38,34%
	30%	-11,42%	-16,67%	-27,72%
	40%	-2,85%	-7,81%	-17,18%
	50%	-0,53%	-0,66%	-6,05%
	Pôvodná návratnosť	-0,60%	-0,69%	-0,85%
	70%	-0,64%	-0,75%	-0,94%
4x zlyhanie	10%	-46,85%	-52,38%	-61,91%
	20%	-35,36%	-41,16%	-49,68%
	30%	-25,05%	-29,91%	-38,89%
	40%	-14,80%	-18,79%	-26,18%
	50%	-5,21%	-8,48%	-14,56%
	Pôvodná návratnosť	-0,78%	-0,91%	-4,53%
	70%	-0,82%	-0,90%	-1,06%
5x zlyhanie	10%	-58,42%	-62,29%	-69,52%
	20%	-45,80%	-50,13%	-57,74%
	30%	-34,79%	-38,59%	-45,75%
	40%	-23,27%	-26,75%	-33,28%
	50%	-12,14%	-14,97%	-20,42%
	Pôvodná návratnosť	-2,37%	-4,75%	-9,48%
	70%	-0,96%	-1,03%	-1,18%

Tabuľka 4.6: Stresové testovanie pravdepodobnosti zlyhania a miery

návratnosti pre tranžu triedy A (s ratingom AAA) z fiktívneho portfólia

Metóda stresovania obidvoch faktorov naraz sa javí ako najefektívnejšia. Z tabuľky vidíme, že najviac zodpovedá reálnemu poklesu cien tranží triedy A s ratingom AAA štvornásobné stresovanie pravdepodobnosti zlyhania a stres strednej hodnoty miery návratnosti na 40%. Pre takto stresové hodnoty sa dostaneme na hodnotu 26,18% pre VaR_{99} , ktorý je najbližšie strate 26 - 27% na reálnych dátach.

Záver

Cieľom tejto práce bolo popísať sekuritizované produkty, oceňovacie metódy a tie následne použiť pre kvantitatívnu analýzu fiktívneho portfólia, ktorej výsledky sa mali použiť pre stresovú analýzu.

V úvodnej kapitole sme si podrobne popísali základné vlastnosti dvoch základných typov sekuritizovaných produktov a pojmy s týmito produktami súvisiacich - sekuritizácia, tranže, dôvody vzniku a kreditnú štruktúru produktov ako aj strany zúčastnené pri transakciách. Na záver sme si uviedli pojmy súvisiace s podkladovým portfóliom a riešili sme problém, ako zostaviť fiktívne portfólio, u ktorého sme si zadali vlastné hodnoty ako priemerný rating faktor, vážený spread, maturitu a index rozmanitosti.

V druhej kapitole sme rozobrali testy pokrytia, popísali sme základné oceňovacie metódy, kde sme sa zamerali na Markovove reťazce a kopula funkcie, ktoré nám v nasledujúcich kapitolách poslúžili pri modelovaní doby do zlyhania. Na koniec sme si popísali, ako funguje prerozdeľovanie finančných tokov a podrobne sme si popísali všetky hodnoty, ktoré boli výstupom kvantitatívnej analýzy.

V nasledujúcej časti práce sme pristúpili k praktickej časti, kde sme si najprv popísali vstupné hodnoty a pomocou Monte Carlo simulácií sme určili peňažné toky, ktoré plynuli jednotlivým tranžiam. Porovnali sme výstupy z kvantitatívnej analýzy bez testov pokrytia s výstupmi s testami, kde sme sa zamerali predovšetkým na hodnotu v riziku, ktorá bola dôležitým faktorom pri stresovom testovaní, ktoré sme študovali v poslednej kapitole.

Na záver sme si popísali situáciu na trhu so štrukturovanými produktami a zamýšľali sme sa nad dôvodmi poklesu cien týchto produktov. Jednému zo záverov - podcenenia skutočnej hodnoty pravdepodobnosti zlyhania a miery návratnosti - sme sa ďalej venovali v hlbšom merítke, kde sme sa pokúsili tieto vstupy stresovať do takej hodnoty, aby sme sa dostali na hodnoty poklesu reálnych dát.

Keď sa pozrieme spätne a zanalyzujeme ceny CDO v minulých rokoch, je zrejmé, že výsledky analýz boli sporné a nikto neočakával, že parametre sa môžu tak radikálne zmeniť. Na základe našej analýzy bolo nutné doby do zlyhania stresovať štvornásobne a strednú hodnotu miery návratnosti na 40%. Dochádzame teda k záveru, že doby do zlyhania aj miery návratnosti sa precenili tak, že nakoniec nedokázali odzrkadliť skutočne vzniknutú udalosť a dôležitosť stresového testovania sa podcenila.

K všetkým výpočtom bol použitý software R verzia 2.11.0, k diverzifikácii portfólia bola použitá funkcia Riešiteľ softwaru MS Excel. Všetky uvedené výpočty sú pôvodné a sú k dispozícii na priloženom CD.

Literatúra

- [1] Burtshell, X., Gregory, J., Laurent, J.P.: *A comparative analysis of CDO pricing models*, 2008
- [2] Dvořáková, J.: *Finanční analýza struktur CDO*, Diplomová práce MFF UK, Praha, 2007
- [3] Franěk, P.: *Cenné papíry podložené aktivy*, přednáška Analýza investic, MFF UK, Praha, 2002
- [4] Howard, D.R., Lee, J., Mancini, M.J.: *Structured finance*, <http://www.fitchbca.com>
- [5] Illová, L.: *Stress testing of bank risks*, Diplomová práce FSV UK, Praha, 2005
- [6] Jež, B.: *Oceňování dluhopisů zajištěných aktivy*, Diplomová práce MFF UK, Praha, 2003
- [7] Kameníková, B., Skopalík A.: *Převod rizik pomocí sekuritizace*, příspěvek na 4. konferenci Riadenia rizík a modelovania finančného rizika, Ostrava, 2008
- [8] Lachout, P., Prášková, Z.: *Základy náhodných procesů*, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2005
- [9] Lucas, D.: *CDO Handbook*, Global Structured Finance Research, New York, 2001
- [10] Mountfield, C. C.: *Synthetic CDOs: Modelling, Valuation and Risk Management*, Cambridge University Press, New York, 2009
- [11] Sedláček, T.: *Sekuritizace*, přednáška Obchodní právo na Právnické fakultě UK, Praha, 2008
- [12] Zahradník, P.: *Kopule a korelace*, Diplomová práce MFF UK, Praha, 2007
- [13] *Collateralized Debt Obligations*, <http://www.finance-management.cz/>

- [14] *Default and Recovery rates*, <http://www.moodys.com/>
- [15] *Modeling default rates*, <http://www.moodys.com/>
- [16] *Simulation methods for risk analysis of collateralized debt obligations*,
<http://www.moodys.com/>